

分析作用于小桩柱波力的谱方法*

袁业立

(中国科学院海洋研究所)

A SPECTRAL METHOD FOR ANALYSIS OF OCEAN WAVE FORCES ON THE SMALL CYLINDER PILE

YUAN YELI

(Institute of oceanology, Academia Sinica)

确定海浪对海上孤立建筑物作用力的特征是海工设计中应考虑的主要问题之一。

近年来,人们开始用谱方法分析海波力的统计特征,这个问题可归结为求两个高斯平稳过程通过两元非线性过滤器的畸变谱及输出过程的分布。

从这样的提法出发,本文以较一般的形式导出了波力谱与表面谱的关系,并利用厄米多项式的特性,给出了波力分布密度的表达式。它表明,在海波作用下,桩柱所受的力是一准高斯过程,据此可导出一些近似的统计关系。

为了叙述方便,我们的讨论仅限于一维波动情况。

一、速度谱、加速度谱与波面谱的关系

我们知道, W. J. Pierson 波谱理论是建立在小振幅波动理论基础上的。他认为波面纵坐标和速度的水平分量可用一高斯平稳过程来描述,它们可表示为许多频率不等,振幅分别为 $\sqrt{A^2(f)df}$, $\sqrt{A_u^2(f)df}$, 相位为在 $[0, 2\pi]$ 间均匀分布的随机变量的余弦波的叠加:

$$\zeta(t) = \int_0^\infty \cos[kx - 2\pi ft + \theta] \sqrt{A^2(f)df} \quad (1.1)$$

$$u(t) = \int_0^\infty \cos[kx - 2\pi ft + \theta] \sqrt{A_u^2(f)df} \quad (1.2)$$

其中 $A^2(f)$ 为表面波频率谱, $A_u^2(f)$ 为速度频率谱。

根据小振幅波理论,对应于每一个简单波动 $\sqrt{A^2(f)df} \cos[kx - 2\pi ft + \theta]$, 其速度的水平分量具有如下形式:

$$\sqrt{A^2(f)df} \frac{gkhk(z+h)}{2\pi fchkh} \cos[kx - 2\pi ft + \theta]$$

其中波数 k 与频率 f 的关系为:

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第366号。本文是为某项海上工作而提出的,在定稿过程中,承本所毛汉礼和海浪组同志的帮助,以及山东海洋学院文圣常、余宙文等同志的审阅指正,均致谢意。

$$4\pi^2 f^2 = gk^2 h k h$$

h 为水深,坐标原点置于平均水面, z 轴向上。

对所有可能的频率叠加上述结果,则得速度水平分量的表达式:

$$u(t) = \int_0^\infty \cos[kx - 2\pi ft + \theta] \sqrt{A^2(f) \frac{g^2 k^2 c h^2 k(z+h)}{4\pi^2 f^2 c h^2 k h}} df \quad (1.4)$$

比较(1.2),(1.4)两式,即得速度谱与表面波谱之间的关系:

$$A_u^2(f) = \frac{g^2 k^2 c h^2 k(z+h)}{4\pi^2 f^2 c h^2 k h} A^2(f) \quad (1.5)$$

因加速度水平分量 $a(t) = \frac{\partial u}{\partial t}$, 所以

$$a(t) = \int_0^\infty \sin[kx - 2\pi ft + \theta] \sqrt{4\pi^2 f^2 A_u^2(f)} df \quad (1.6)$$

故加速度谱与表面波谱之间的关系为:

$$A_a^2(f) = g^2 k^2 \frac{c h^2 k(z+h)}{c h^2 k h} A^2(f) \quad (1.7)$$

正如 A. Popoulis 在《Probability, Random variables and stochastic Processes》一书中所指出的,作为正态过程 $u(t)$ 之导函数的 $u'(t)$ 也是一正态过程,且 $u(t)$ 、 $u'(t)$ 必是联合正态的。

二、波力谱与速度谱、加速度谱的关系

直立于海滨的桩柱所受的海波作用力 $f(t)$ 与海波本身一样,是随机的。实际上,在一个不太长的时间区间内,产生这些现象的主要条件是无甚变化的。因此,其统计特征可以认为是不随时间的推移而变化的。这样的过程可以一平稳随机过程来描述。

J. R. Morison 曾经指出,对小桩柱来说,波力 $f(t)$ 和速度 $u(t)$, 加速度 $u'(t)$ 之间有如下关系式:

$$f(t) = C_D \frac{\gamma D}{2g} u(t) |u(t)| + C_m \frac{\gamma \pi D^2}{4g} u'(t) \quad (2.1)$$

其中 γ 是海水比重, g 是重力加速度, D 是桩柱的直径, C_D 是阻力系数(或速度系数), C_m 是惯性系数(或加速度系数)。显然它也应当描述随机波力的现实与速度现实及加速度现实之间的关系,但是,在实际计算海波对桩柱作用力时,这样的公式是不够的,例如它甚至不能描述具有较大潮流或海流情况下海波对桩柱的作用力。为了使我们的方法能较广泛地讨论一些问题,我们将以下述较一般的提法作为出发点: 若 $x(t)$, $y(t)$ 为服从联合正态分布的平稳随机过程,其均值为 0, 并已知其各相关函数及谱,试求过程 $f(t) = \varphi[x(t)] + \psi[y(t)]$ 的相关函数及谱,其中 $\varphi(x)$ 、 $\psi(y)$ 为满足以下条件的已知函数:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} dx &= A < \infty \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} dy &= B < \infty \end{aligned} \quad (2.2)$$

σ_1 、 σ_2 分别为 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的均方差。

这里我们直接假定 $x(t)$ 与 $y(t)$ 服从联合正态分布是与第一节中所指出的以下事实相一致的, 即速度过程和作为它的导数的加速度过程是联合正态平稳过程。

这样, 随机变量对 (x_1, x_2) 、 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_1) 、 (y_1, y_2) 的联合分布密度可写成:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1^2\sqrt{1-\rho_{11}^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{11}^2)}\left[\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{11}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2}{\sigma_1}\right) + \left(\frac{x_2}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} \\ p(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{21}^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{21}^2)}\left[\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\ p(x_2, y_1) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{21}^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{21}^2)}\left[\left(\frac{x_2}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{21}\left(\frac{x_2}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_1}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_1}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\ p(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_2^2\sqrt{1-\rho_{22}^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{22}^2)}\left[\left(\frac{y_1}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho_{22}\left(\frac{y_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \quad (2.3) \end{aligned}$$

其中 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 表示两平稳过程 $x(t)$ 、 $y(t)$ 在 t_1 、 t_2 两个截面上的随机变量。它们分别有相同的均方差 σ_1 、 σ_2 。 $\rho_{11} = R_{11}/\sigma_1^2$, R_{11} 是随机函数 $x(t)$ 在 t_1 、 t_2 截面间的自相关函数; $\rho_{22} = R_{22}/\sigma_2^2$, R_{22} 是随机函数 $y(t)$ 在 t_1 、 t_2 截面间的自相关函数; $\rho_{12} = R_{12}/\sigma_1\sigma_2$, R_{12} 是随机函数 $x(t)$ 、 $y(t)$ 在截面 t_1 、 t_2 间的交相关函数; $\rho_{21} = R_{21}/\sigma_1\sigma_2$, R_{21} 是随机函数 $x(t)$ 、 $y(t)$ 在截面 t_2 、 t_1 间的交相关函数。显然 $R_{12} = -R_{21}$ 。

在以后的运算中, 我们经常使用如下形式的厄米多项式:

$$h_n(z) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{-\frac{z^2}{2}} \right)$$

它的正交关系式是

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_m(z) h_n(z) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = \delta_{m,n}$$

易证

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) h_n(y) \rho^n e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad (2.4)$$

随机过程 $f(t) = \varphi(x(t)) + \phi(y(t))$ 是一平稳过程。事实上, $x(t)$ 、 $y(t)$ 均设为正态平稳过程, 因此, 当 $t_2 = t_1 + \tau$ 时, 所有均方差 σ_1 、 σ_2 均为常数, ρ_{11} 、 ρ_{22} 、 ρ_{12} 、 ρ_{21} 均仅为 τ 的函数。由(2.3)式可知, 它们完全构成了各联合分布密度函数的参数。

在集合平均的意义下, $f(t)$ 的相关函数可写作:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E\{f(t_1)f(t_2)\} = E\{[\varphi(x_1) + \phi(y_1)][\varphi(x_2) + \phi(y_2)]\} \\ &= E\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} + E\{\varphi(x_1)\phi(y_2)\} + E\{\varphi(x_2)\phi(y_1)\} + E\{\phi(y_1)\phi(y_2)\} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\varphi(x_2)p(x_1, x_2)dx_1dx_2 + \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\phi(y_2)p(x_1, y_2)dx_1dy_2 \\ &\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_2)\phi(y_1)p(x_2, y_1)dx_2dy_1 + \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1)\phi(y_2)p(y_1, y_2)dy_1dy_2 \quad (2.5) \end{aligned}$$

这里积分 $R(t_1, t_2)$ 存在且有限, 事实上, 在条件(2.2)式成立的情况下, (2.5)式右端的四

个积分都存在且有限,例如对 $\iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\phi(y)p(x,y)dxdy$ 来说,由 Schwarz 不等式

$$(\int f(x)g(x)dx)^2 \leq \int f^2(x)dx \cdot \int g^2(x)dx$$

可知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| |\phi(y)| \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} d\frac{x}{\sigma_1} d\frac{y}{\sigma_2} \\ & \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_1} \right)^2 \right] \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x}{\sigma_1} - \rho \frac{y}{\sigma_2} \right)^2 \right] d\frac{x}{\sigma_1} d\frac{y}{\sigma_2} \right)^{1/2} \\ & \quad \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \phi^2(y) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_2} \right)^2 \right] \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{y}{\sigma_2} - \rho \frac{x}{\sigma_1} \right)^2 \right] d\frac{x}{\sigma_1} d\frac{y}{\sigma_2} \right)^{1/2} \\ & = \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_1} \right)^2 \right] d\frac{x}{\sigma_1} \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(y) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_2} \right)^2 \right] d\frac{y}{\sigma_2} \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

因此可证 $E\{|f(t_1)f(t_2)|\} < \infty$

即 $R(t_1, t_2)$ 存在且有限。

上面已经说过, τ 是(2.5)式右端积分的唯一参数,所以 $R(t_1, t_2)$ 也仅是 τ 的函数,即 $f(t)$ 为一弱平稳随机过程。

以下我们就来导出 $f(t)$ 的相关函数与 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的各相关函数之间的关系式,将(2.3)式按(2.4)式展开,并将其结果代入(2.5)式,可得

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\varphi(x_2) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1}{\sigma_1})^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{x_2}{\sigma_1} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_2}{\sigma_1})^2}}{\sqrt{2\pi}} \rho_{11}^m d\frac{x_1}{\sigma_1} d\frac{x_2}{\sigma_1} \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\phi(y_2) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1}{\sigma_1})^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{y_2}{\sigma_2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_2}{\sigma_2})^2}}{\sqrt{2\pi}} \rho_{12}^m d\frac{x_1}{\sigma_1} d\frac{y_2}{\sigma_2} \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_2)\phi(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{x_2}{\sigma_1} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_2}{\sigma_1})^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{y_1}{\sigma_2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1}{\sigma_2})^2}}{\sqrt{2\pi}} \rho_{21}^m d\frac{x_2}{\sigma_1} d\frac{y_1}{\sigma_2} \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1)\phi(y_2) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{y_1}{\sigma_2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1}{\sigma_2})^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{y_2}{\sigma_2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_2}{\sigma_2})^2}}{\sqrt{2\pi}} \rho_{22}^m d\frac{y_1}{\sigma_2} d\frac{y_2}{\sigma_2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\alpha_m^2 \frac{R_{11}^m}{\sigma_1^{2m}} + \alpha_m \beta_m \left(\frac{R_{12}^m + R_{21}^m}{\sigma_1^m \sigma_2^m} \right) + \beta_m^2 \frac{R_{22}^m}{\sigma_2^{2m}} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) h_m \left(\frac{x}{\sigma_1} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma_1})^2}}{\sqrt{2\pi}} d\left(\frac{x}{\sigma_1} \right), \\ \beta_m &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) h_m \left(\frac{y}{\sigma_2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sigma_2})^2}}{\sqrt{2\pi}} d\frac{y}{\sigma_2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

这就是 $f(t)$ 的相关函数与 $x(t)$ 、 $y(t)$ 诸相关函数之间的关系。这里积分号与和号是可以交换的,事实上,例如对(2.6)式右端的第二项来说,

$$\left| \sum_{m=0}^N \varphi(x)\phi(y) h_m \left(\frac{x}{\sigma_1} \right) h_m \left(\frac{y}{\sigma_2} \right) e^{-\frac{1}{2}[(\frac{x}{\sigma_1})^2 + (\frac{y}{\sigma_2})^2]} \rho_{12}^m \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=0}^N |\varphi(x)| |h_m\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)| e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} |\phi(y)| |h_m\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)| e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} |\rho|^m \\ &\leq \sum_{m=0}^N \left[\varphi^2(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} + h_m^2\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \right] \left[\phi^2(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} + h_m^2\left(\frac{y}{\sigma_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right] |\rho|^m \end{aligned}$$

上式的右端显然是随 N 的增加而单调增加的,并且当 $|\rho| < 1$ 时,是 Lebesgue 可积的,因为,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^N |\rho|^m \left[\varphi^2(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} + h_m^2\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \right] \left[\phi^2(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + h_m^2\left(\frac{y}{\sigma_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right] d\frac{x}{\sigma_1} d\frac{y}{\sigma_2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N |\rho|^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi^2(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} + h_m^2\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \right] d\frac{x}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi^2(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + h_m^2\left(\frac{y}{\sigma_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right] d\frac{y}{\sigma_2} \end{aligned}$$

由条件(2.2)和正交关系式(2.4)可知,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq \sum_{m=0}^N |\rho|^m (A+1)(B+1) = (A+1)(B+1) \cdot \frac{1-|\rho|^{N+1}}{1-|\rho|} \\ &< (A+1)(B+1)/1-|\rho| < \infty \end{aligned}$$

所以必有一 Lebesgue 可积函数 $\varphi(x, y)$ 存在,并

$$\sum_{m=0}^N |\rho|^m \left[\varphi(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} + h_m^2\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \right] \left[\phi^2(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} + h_m^2\left(\frac{y}{\sigma_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right]$$

几乎处处收敛于 $\varphi(x, y)$, 对于这个函数 $\varphi(x, y)$ 显然有

$$\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \varphi(x) \phi(y) h_m\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) h_m\left(\frac{y}{\sigma_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \rho^m \right| \leq \varphi(x, y)$$

这样由 Lebesgue 定理直接可引出积分可交换的结果。

(2.6)式在 $\rho^2 = 1$ 的情况下也成立,仍以第二项为例,因 $\rho_{21}^2 = 1$, 由 Parseval 等式可知

$$E\{\varphi(x_2)\phi(y_1)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\phi(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} d\frac{x}{\sigma_1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \beta_m$$

这正是(2.6)式中的相应项。

显然,若 $R_{11}(\tau)$ 、 $R_{22}(\tau)$ 、 $R_{12}(\tau)$ 、 $R_{21}(\tau)$ 对 τ 是连续的则 $R(\tau)$ 也是连续的,所以 $f(t)$ 的谱函数存在,对(2.6)式两端作 Fourier 变换,则可得 $f(t)$ 的谱:

$$\begin{aligned} A_F^2(f) &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^2 \frac{1}{\sigma_1^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}^m(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \beta_m \frac{1}{\sigma_1^m \sigma_2^m} \int_{-\infty}^{\infty} (R_{12}^m(\tau) + R_{21}^m(\tau)) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^2 \frac{1}{\sigma_2^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{22}^m(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \end{aligned}$$

利用 Fourier 变换的折合式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau) R_2(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A_1^2(g) A_2(f-g) dg$$

$$\overline{\overline{A_1^2 * A_2}} \quad (\text{记作})$$

并注意常数的 Fourier 变换是 Dirac delta 函数这一事实, 我们就不难得到 $f(t)$ 的谱与 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的诸谱之间的关系:

$$A_F(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_m^2 \frac{1}{\sigma_1^{2m}} A_1^{2*m} + \alpha_m \beta_m \frac{1}{\sigma_1^m \sigma_2^m} (A_{12}^{2*m} + A_{21}^{2*m}) + \beta_m^2 \frac{1}{\sigma_2^{2m}} A_2^{2*m} \right] + (\alpha_0 + \beta_0)^2 \delta(f)$$

其中

$$A^2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (2.8)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(f) e^{2\pi i f \tau} df.$$

由(2.7)式我们可以看到, $\alpha_0 + \beta_0$ 实际上就是 $f(t)$ 的均值。

推论

通常采用如下形式的 Morison 公式来描述小桩柱在波动场中所受之作用力,

$$f(t) = a k(u(t)) + b a(t)$$

其中

$$k(x) = \begin{cases} x|x|, & \text{或} \\ (c+x)|c+x|, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$a = c_D \frac{\gamma D}{2g}, \quad b = c_m \frac{\gamma \pi D^2}{4g},$$

c 表示某常速度值。

显然 $k(x)$ 的第二种形式概括了第一种情况, 这时有:

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} a(c+x)|c+x| h_m\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} d\frac{x}{\sigma_1}$$

$$= a \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-c_1}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-c_1} \right) (c_1+x)^2 h_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

其中

$$c_1 = c/\sigma_1.$$

$$\text{可以证明 } h_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{m}} (h_{m-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}})'.$$

$$\text{记 } G_m = \int_{-c_1}^{\pm\infty} (c_1+x)^2 h_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{m}} \int_{-c_1}^{\pm\infty} (c_1+x) h_{m-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m(m-1)}} \int_{-c_1}^{\pm\infty} h_{m-2}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{m(m-1)(m-2)}} h_{m-3}(-c_1) e^{-\frac{c_1^2}{2}}$$

$$\text{所以 } \alpha_m = \frac{(-1)^{m-3} a}{\sqrt{m(m-1)(m-2)}} \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}} h_{m-3}(c_1) e^{-\frac{c_1^2}{2}}, \quad m \geq 3;$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 2a \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} a \sigma_1^2 \phi(c_1); \\ \alpha_1 &= 4a \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = 2a \sigma_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \phi(c_1) \right); \\ \alpha_0 &= a \sigma_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x + c_1) |x + c_1| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = a \sigma_1^2 \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 e^{-\frac{c_1^2}{2}} + (1 + c_1^2) \phi(c_1) \right];\end{aligned}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} y h_n \left(\frac{y}{\sigma_2} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_2} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} d \frac{y}{\sigma_2} = \sqrt{n} \sigma_2 \delta_{0, n-1}$$

所以 $\beta_m = b \sqrt{m} \sigma_2 \delta_{0, m-1}$,

其中 $\phi(c_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

将以上 α_m , β_m 的表达式代入(2.8)式则得:

$$\begin{aligned}A_F^2(f) &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \frac{1}{\sigma_1^m} A_1^{2*m} + 2ab\sigma_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \phi(c_1) \right) (A_{12}^2 + A_{21}^2) \\ &\quad + b^2 A_2^2 + \alpha_0^2 \delta(f)\end{aligned}\quad (2.12)$$

考虑到交相关函数和交谱 R_{12} , A_{12}^2 都是奇函数,故上式中的第二项实际上并不存在。

保留 $m=1$ 的项,可得如下近似式子,

$$A_F^2(f) = 4a^2 \sigma_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \phi(c_1) \right)^2 A_u^2(f) + b^2 A_{u'}^2(f) + \alpha_0^2 \delta(f) \quad (2.13)$$

当 $c_1 = 0$ 时,可得

$$A_F^2(f) = \frac{8a^2 \sigma_1^2}{\pi} \left(A_{u'}^2(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)} [(n-1)!]^2 (2n+1) 2n (2n-1) \sigma_1^{4n}} A_u^{2*(2n+1)} \right) + b^2 A_{u'}^2(f) \quad (2.14)$$

由(2.14)式可知,级数的各项按 $(2n)^{-3}$ 减小,故可以粗略地认为保留第一项,已能得到相当好的近似关系了。

这样联立(1.5), (1.7), (2.11), (2.12)即可得波力谱与表面波谱之间的关系。

显然,

$$\left(e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)'_{c_1} = \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\text{所以 } \left(e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)'_{c_1} \begin{cases} > 0, \text{ 当 } c_1 > 0, \\ < 0, \text{ 当 } c_1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{而 } \left(e^{-\frac{c_1^2}{2}} + c_1 \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)'_{c_1=0} = 1;$$

由此可知,随着常流绝对值 $|c_1|$ 的增大,速度谱系数的平方根将按速率 $\left| \int_0^{c_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right|$ 增大。

最后我们指出(见附录),上述技巧同样可用来导出不同位置上单位柱长波力之间的

交相关函数和交谱,这样我们就能处理更一般的桩群问题。

三、海波力的分布函数

(2.10)式表明,海波力是海波质点速度及加速度的函数,为了导出海波力的分布函数,我们首先应给出速度和加速度的联合分布函数, $p(u, u')$,对某一时刻而言,海波的质点速度和加速度是不相关的正态随机变量,故

$$p(u, u') = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{u'^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

因为 $f = ak(u) + bu'$, 作变换 $u = u$, $u' = \frac{1}{b}[f - ak(u)]$, 即可得海波力 f 与速度 u 的联合分布函数

$$p(u, f) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 b} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left\{-\frac{[(f - \alpha_0) - (ak(u) - \alpha_0)]^2}{2\sigma_2^2 b^2}\right\} \quad (3.2)$$

由(2.12)式可知,波力的方差

$$\sigma_f^2 = R_f(0) - \alpha_0^2 = b^2\sigma_2^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\sigma_1^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} A_u^{2*m}(f) df,$$

以下我们简记 $\Delta^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\sigma_1^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} A_u^{2*m}(f) df$,

所以 $b^2\sigma_2^2 = \sigma_f^2 - \Delta^2 = \sigma_f^2(1 - \rho^2)$, 其中 $\rho^2 = \Delta^2/\sigma_f^2$ 。

这样(3.2)式可写成

$$p(u, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp\left[-\frac{(f - \alpha_0)^2}{2\sigma_f^2}\right] \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2 f_1^2 - 2\rho f_1 k_1(u) + \rho^2 k_1^2(u)}{2(1 - \rho^2)}\right\}$$

其中 $f_1 = \frac{f - \alpha_0}{\sigma_f}$, $k_1(u) = \frac{ak(u) - \alpha_0}{\sigma_f \rho} = \frac{ak(u) - \alpha_0}{\Delta}$ 。

利用(2.4)式,可得

$$p(u, f) = \sum_{v=0}^{\infty} \rho^v \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp\left[-\frac{(f - \alpha_0)^2}{2\sigma_f^2}\right] h_v\left(\frac{f - \alpha_0}{\sigma_f}\right) \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) h_v\left(\frac{ak(u) - \alpha_0}{\Delta}\right) \quad (3.4)$$

对所有可能的 u 值积分,即可得波力的分布密度函数,

$$p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, f) du \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp\left[-\frac{(f - \alpha_0)^2}{2\sigma_f^2}\right] \\ \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \rho^v h_v\left(\frac{f - \alpha_0}{\sigma_f}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right) h_v\left(\frac{ak(u) - \alpha_0}{\Delta}\right) d\frac{u}{\sigma_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f}} \exp\left[-\frac{(f-\alpha_0)^2}{2\sigma_f}\right] \cdot \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \rho^v h_v\left(\frac{f-\alpha_0}{\sigma_f}\right) \chi_v\left(c_1, \frac{\alpha_0}{\Delta}, \frac{a\sigma_1^2}{\Delta}\right)\right]$$

其中 $\chi_v\left(c_1, \frac{\alpha_0}{\Delta}, \frac{a\sigma_1^2}{\Delta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-c_1)^2}{2}\right) h_v\left(\frac{a\sigma_1^2}{\Delta} x^2 - \frac{\alpha_0}{\Delta}\right) \right.$
 $\left. + (-1)^v \exp\left(-\frac{(x+c_1)^2}{2}\right) h_v\left(\frac{a\sigma_1^2}{\Delta} x^2 + \frac{\alpha_0}{\Delta}\right) \right] dx$

这就是所求的分布函数的一般形式。

当 $c_1 = 0$ 时, $\alpha_0 = 0$, $\chi_v\left(0, 0, \frac{\Delta\sigma_1^2}{\Delta}\right)$ 可以简单地积出, 其结果是

$$\chi_{2n-1}\left(0, 0, \frac{\Delta\sigma_1^2}{\Delta}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \chi_{2n}\left(0, 0, \frac{\Delta\sigma_1^2}{\Delta}\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) h_{2n}\left(\frac{a\sigma_1^2}{\Delta} x^2\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sqrt{2n!} \left(\frac{a\sigma_1^2}{\Delta}\right)^{2(n-k)}}{2^k k! [2(n-k)]!} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^{4(n-k)} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sqrt{2n!} [4(n-k)-1]!!}{2^k k! [2(n-k)]!} \left(\frac{a\sigma_1^2}{\Delta}\right)^{2(n-k)} \end{aligned}$$

这时

$$\begin{aligned} p(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f}} \exp\left[-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}\right] \cdot \\ &\cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} h_{2n}\left(\frac{f}{\sigma_f}\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sqrt{2n!} [4(n-k)-1]!!}{2^k k! [2(n-k)]!} \left(\frac{a\sigma_1^2}{\Delta}\right)^{2(n-k)}\right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

由(3.5), (3.6)式可知, 当 $\rho \sim 0$ 时, 波力的分布是准高斯的, 如果把波力的分布近似地看作是高斯的, 将可以延用描述波浪统计特征的一些重要结果:

(1) 最大波力分布

$$\begin{aligned} p(f_m) &\doteq (2\pi\sigma_f)^{-1/2} \left[\varepsilon \exp\left(-\frac{f_m^2}{2\varepsilon^2}\right) + \right. \\ &\left. + (1-\varepsilon^2)^{1/2} f_m \exp\left(-\frac{f_m^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{f_m(1-\varepsilon)^{1/2}/\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $\varepsilon^2 = \frac{\sigma_f^2 m_4 - m_2^2}{\sigma_f^2 m_4}$, $m_v = (2\pi)^v \int_0^{\infty} f^v A_F^2(f) df$

(2) 作用力的平均变幅(在窄谱情况下)

$$\bar{f}_{\phi} \doteq \sqrt{2\pi(b^2\sigma_2^2 + \Delta^2)^{1/2}}$$

(3) 海波力平均作用周期

$$\bar{\tau} \doteq \left(\int_0^{\infty} A_F^2 df / \int_0^{\infty} A_F^2 f^2 df \right)^{1/2}$$

显然, 这些统计关系只有在惯性阻力占主要地位, $\rho \sim 0$, 即桩柱直径已相当大, 但与波长相比仍是很小的情况下才是可取的。

*

*

*

附录 交相关函数和交谱关系

我们用 $\mathbf{x}$ 标志平稳高斯过程 $x(t)$, $y(t)$ 的位置参数, 则随机变量对 $[x(\mathbf{x}, t_1), x(\mathbf{x}, t_2)], [x(\mathbf{x}, t_1), y(\mathbf{x}', t_2)], [x(\mathbf{x}', t_2), y(\mathbf{x}, t_1)], [y(\mathbf{x}, t_1), y(\mathbf{x}, t_2)]$ 的联合分布可写成:

$$\begin{aligned}
 p[x_1(\mathbf{x}), x_2(\mathbf{x}')] &= \frac{1}{2\pi\sigma_1(\mathbf{x})\sigma_1(\mathbf{x}')\sqrt{1-\rho_{11}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau)}} \\
 &\cdot \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{11}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau))}\left(\frac{x_1^2(\mathbf{x})}{\sigma_1^2(\mathbf{x})} - 2\rho_{11}\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} \cdot \frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')} + \frac{x_2^2(\mathbf{x}')}{\sigma_1^2(\mathbf{x}')}\right)\right], \\
 p[x_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}')] &= \frac{1}{2\pi\sigma_1(\mathbf{x})\sigma_2(\mathbf{x}')\sqrt{1-\rho_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau)}} \\
 &\cdot \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{12}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau))}\left(\frac{x_1^2(\mathbf{x})}{\sigma_1^2(\mathbf{x})} - 2\rho_{12}(\tau)\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} \cdot \frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} + \frac{y_2^2(\mathbf{x}')}{\sigma_2^2(\mathbf{x}')}\right)\right], \\
 p[x_2(\mathbf{x}'), y_1(\mathbf{x})] &= \frac{1}{2\pi\sigma_1(\mathbf{x}')\sigma_2(\mathbf{x})\sqrt{1-\rho_{12}(\mathbf{x}', \mathbf{x}; -\tau)}} \\
 &\cdot \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{12}^2(\mathbf{x}', \mathbf{x}; -\tau))}\left(\frac{x_2^2(\mathbf{x}')}{\sigma_1^2(\mathbf{x}')} - 2\rho_{12}(-\tau)\frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')} \cdot \frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} + \frac{y_1^2(\mathbf{x})}{\sigma_2^2(\mathbf{x})}\right)\right], \\
 p[y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x})] &= \frac{1}{2\pi\sigma_2(\mathbf{x})\sigma_2(\mathbf{x}')\sqrt{1-\rho_{22}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau)}} \\
 &\cdot \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{22}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau))}\left(\frac{y_1^2(\mathbf{x})}{\sigma_2^2(\mathbf{x})} - 2\rho_{22}\frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \cdot \frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} + \frac{y_2^2(\mathbf{x}')}{\sigma_2^2(\mathbf{x}')}\right)\right] \quad (A)
 \end{aligned}$$

这样, $\mathbf{x}$ 处与 $\mathbf{x}'$ 处 $f(t)$ 的交相关函数可表示如下:

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau) &= \overline{f(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}', t+\tau)} \\
 &= \overline{[\varphi(x_1(\mathbf{x})) + \phi(y_1(\mathbf{x}))][\varphi(x_2(\mathbf{x}')) + \phi(y_2(\mathbf{x}'))]} \\
 &= \overline{\varphi(x_1(\mathbf{x}))\varphi(x_2(\mathbf{x}'))} + \overline{\varphi(x_1(\mathbf{x}))\phi(y_2(\mathbf{x}'))} \\
 &\quad + \overline{\phi(x_2(\mathbf{x}'))\phi(y_1(\mathbf{x}))} + \overline{\phi(y_1(\mathbf{x}))\phi(y_2(\mathbf{x}'))} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1(\mathbf{x}))\varphi(x_2(\mathbf{x}'))p(x_1(\mathbf{x}), x_2(\mathbf{x}'))dx_1(\mathbf{x})dx_2(\mathbf{x}') \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1(\mathbf{x}))\phi(y_2(\mathbf{x}'))p(x_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}'))dx_1(\mathbf{x})dy_2(\mathbf{x}') \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_2(\mathbf{x}'))\phi(y_1(\mathbf{x}))p(x_2(\mathbf{x}'), y_1(\mathbf{x}))dx_2(\mathbf{x}')dy_1(\mathbf{x}) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1(\mathbf{x}))\phi(y_2(\mathbf{x}'))p(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}'))dy_1(\mathbf{x})dy_2(\mathbf{x}') \quad (B)
 \end{aligned}$$

利用(2.4)式将 (A) 式展开后代入 (B) 式则有,

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[x_1(\mathbf{x})]\varphi[x_2(\mathbf{x}')] \sum_{m=0}^{\infty} h_m\left(\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m\left(\frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \\
 &\quad \cdot \rho_{11}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau) d\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} d\frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1(\mathbf{x})) \phi(y_2(\mathbf{x}')) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \\
& \quad \cdot \rho_{12}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau) d \frac{x_1(\mathbf{x})}{\sigma_1(\mathbf{x})} d \frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} \\
& + \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_2(\mathbf{x}')) \phi(y_1(\mathbf{x})) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \\
& \quad \cdot \rho_{12}^m(\mathbf{x}', \mathbf{x}; -\tau) d \frac{x_2(\mathbf{x}')}{\sigma_1(\mathbf{x}')} d \frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \\
& + \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1(\mathbf{x})) \phi(y_2(\mathbf{x}')) \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_1(\mathbf{x})}{\sigma_2(\mathbf{x})} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} h_m \left(\frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_2(\mathbf{x}')}{\sigma_2(\mathbf{x}')} \right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \\
& = [\alpha_0(\mathbf{x}) + \beta_0(\mathbf{x})][\alpha_0(\mathbf{x}') + \beta_0(\mathbf{x}')] \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_m(\mathbf{x}) \alpha_m(\mathbf{x}') \frac{R_{11}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau)}{\sigma_1^m(\mathbf{x}) \sigma_1^m(\mathbf{x}')} + \alpha_m(\mathbf{x}) \beta_m(\mathbf{x}') \frac{R_{12}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau)}{\sigma_1^m(\mathbf{x}) \sigma_2^m(\mathbf{x}')} \right. \\
& \quad \left. + \alpha_m(\mathbf{x}') \beta_m(\mathbf{x}) \frac{R_{12}^m(\mathbf{x}', \mathbf{x}; -\tau)}{\sigma_1^m(\mathbf{x}') \sigma_2^m(\mathbf{x})} + \beta_m(\mathbf{x}) \beta_m(\mathbf{x}') \frac{R_{22}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau)}{\sigma_2^m(\mathbf{x}) \sigma_2^m(\mathbf{x}')} \right] \quad (C)
\end{aligned}$$

这就是所要求的 $\mathbf{x}$ 处与 $\mathbf{x}'$ 处 $f(t)$ 的交相关函数与 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的诸交相关函数之间的关系。

对上式两边作 Fourier 变换, 则可得交谱之间的关系。

$$A_F^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; f) = [\alpha_0(\mathbf{x}) + \beta_0(\mathbf{x})][\alpha_0(\mathbf{x}') + \beta_0(\mathbf{x}')] \delta(f)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_m(\mathbf{x}) \alpha_m(\mathbf{x}') \frac{1}{\sigma_1^m(\mathbf{x}) \sigma_1^m(\mathbf{x}')} A_{11}^{2*m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; f) \right. \\
& \quad + \alpha_m(\mathbf{x}) \beta_m(\mathbf{x}') \frac{1}{\sigma_1^m(\mathbf{x}) \sigma_2^m(\mathbf{x}')} A_{12}^{2*m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; f) \\
& \quad + \alpha_m(\mathbf{x}') \beta_m(\mathbf{x}) \frac{1}{\sigma_1^m(\mathbf{x}') \sigma_2^m(\mathbf{x})} A_{12}^{2*m}(\mathbf{x}', \mathbf{x}; -f) \\
& \quad \left. + \beta_m(\mathbf{x}) \beta_m(\mathbf{x}') \frac{1}{\sigma_2^m(\mathbf{x}) \sigma_2^m(\mathbf{x}')} A_{22}^{2*m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; f) \right] \quad (D)
\end{aligned}$$

其中 α_m 、 β_m 的定义同(2.7)式; $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau)$ 和 $A_F^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; f)$ 分别表示 $\mathbf{x}$ 处和 $\mathbf{y}$ 处的 $f(t)$ 的交相关函数和交谱; $R_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau)$ 和 $A_{12}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; f)$ 分别表示 $\mathbf{x}$ 处的第一个函数 $x(t)$ 与 $\mathbf{y}$ 处的第二个函数 $y(t)$ 之间的交相关函数和交谱; 其他符号意义类同。

参 考 文 献

- [1] 王竹溪、郭敦仁, 1965. 特殊函数概论 科学出版社. 359—360 页
- [2] 河田龙夫, 1957. 确率过程论的应用, 岩波书店(中译本: 随机过程的应用, 刘璋温译, 上海科学技术出版社 50—55 页)。
- [3] Borgman L. E., 1967. Spectral Analysis of Ocean wave forces on Piling. *Jour. of the waterways and Harbors Division* 93: 2.
- [4] 山东海洋学院, 海浪讲义。