

半封闭海域内的环流模式*

杨 天 鸿

(中国科学院海洋研究所)

本文讨论了仅有一个口门与外海相邻接的等深矩形海域内的环流分布。

本文给出了在这种海域内的定常海流的流函数表达式。从数学上来说,由于在口门这一边的边界条件上存在着第一类间断点,因此可以求得分区域的函数解,或者整个区域的级数解。为了工作的方便,本文采用后一种形式的解。

最后,本文把渤海作为矩形海域,渤海海峡为其口门,求得了渤海内环流分布的模式。这一结果与现有的渤海环流分布的定性结果趋向较为一致。

一、问题的提出和方程组的建立

ШТОКМАН (1946)^[4] 提出了在非均匀海内联系风场和全流场的方程为

$$\nabla^4 \psi = - \frac{\text{curl}_z \mathbf{T}}{A_l} \quad (1)$$

式中, ψ 表示全流函数; A_l 表示侧向湍流粘滞系数; $\mathbf{T}$ 表示海面上的风切应力矢量; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, 表示双调和方程的微分算符; curl_z 表示矢量场旋度的垂直分量。本文所取的坐标系是: OX 轴向东为正, OY 轴向北为正, OZ 轴向下为正, 坐标原点位于静止海面处。

ШТОКМАН (1946^[4]; 1952^[5]) 利用上述方程,研究了具有粘着边界条件的封闭的矩形和椭圆形海域内的风生环流模式。实际上,除了内陆海以外,各个边缘海总是通过口门、海峡或者分界区域与邻近海域相通的。Takano (1954)^[3] 研究了垂直方向上的口门流入对于内部海域的流速分布的影响问题,但是,他没有考虑风的作用。本文的目的在于,探讨口门流速分布和海面上的风所产生的半封闭浅海区域内的环流分布模式。为了叙述的简便,这里仅讨论一个口门的情况。

Munk (1950)^[1] 在研究风生大洋环流时,把大洋作为封闭的矩形海域,从而求得了具有粘着边界条件的大洋风生环流的零阶模式。Munk 和 Carrier (1950)^[2] 研究了把大洋作为封闭的三角形海域,其中两条边界取粘着边界条件,另一条边界取滑动边界条件,求得了大洋风生环流的类似模式。Munk (1950)^[1] 以及 Munk 和 Carrier (1950)^[2] 在讨论上述问题时,所采用的方程与(1)式的不同点在于前者考虑了 β 效应。由于本文所讨论

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 508 号。

本文是在毛汉礼教授热情指导和帮助下完成的,管秉贤等同志对本文提出了许多宝贵意见;山东海洋学院景振华老师给予很大的鼓励和支持,特此致谢。

本刊编辑部收稿日期: 1978 年 6 月 26 日。

的海域的空间尺度约为几百公里的中等尺度,因而 β 效应可以忽略不计,故仍采用(1)式进行讨论。但是为了叙述的方便,我们采用平均流速,即 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$,代替全流流速 S_x 和 S_y ,

它们之间的关系,可以用下式表示

$$S_x = \bar{u}H, S_y = \bar{v}H \quad (2)$$

式中, S_x 和 S_y 分别表示全流流速在OX轴和OY轴方向上的分量; $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 分别表示垂直平均流速在OX轴和OY轴方向上的分量; H 表示海的深度。同时,引用平均流速的流函数 φ 代替全流流速的流函数 Ψ 。在 H 为常量的情况下,(1)式可以写成

$$\nabla^4 \varphi = - \frac{\text{curl}_z \mathbf{T}}{HA_1} \quad (3)$$

本文所讨论的海域,如图1所示。它与Штокман (1946) 和 Munk (1950) 所讨论的矩形海域的不同点仅在 $x = a$ 的这一边上,于 $\alpha_1 b < y < (\alpha_1 + \alpha_2)b$

图1 有一个口门的矩形半封闭海域

处有一个口门与外海相通(这里的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是小于1的正数)。

本文所用的边界条件是:

$$\text{在 } y = 0 \text{ 处, } \varphi = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$\text{在 } y = b \text{ 处, } \varphi = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } \varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\text{在 } x = a \text{ 处, } \varphi = \varphi(a, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

式中, a 表示矩形海域的横向尺度(宽度); b 表示矩形海域的纵向尺度(长度)。

由于在 $x = a, \alpha_1 b < y < (\alpha_1 + \alpha_2)b$ 处为一个与外海相邻接的口门,在定常状态下,我们假定从口门流入的流量应该等于从口门流出的流量,并且流速分布可以用下式表示

$$\bar{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_0 \sin \frac{2\pi}{\alpha_2 b} (y - \alpha_1 b) \quad (8)$$

$$\bar{v} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

式中, u_0 表示在口门处的最大流速。

这样,在(7)式中, $\varphi(a, y)$ 可以写成

$$\varphi(a, y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq \alpha_1 b \\ \frac{\alpha_2 b u_0}{2\pi} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\alpha_2 b} (y - \alpha_1 b) \right] & \alpha_1 b < y < (\alpha_1 + \alpha_2)b \\ 0 & (\alpha_1 + \alpha_2)b \leq y \leq b \end{cases} \quad (10)$$

从边界条件(4),(5),(6),(7),(10)式可以看出,本文在 $x = 0$ 和 $x = a$ 处(除了口门区域以外)采用粘着性边界条件,而在 $y = 0$ 和 $y = b$ 处采用滑动边界条件。

二、方程的求解

由于边界条件(4)式和(5)式,方程(3)的解可以写成

$$\varphi(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

式中

$$\varphi_n(x) = \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (12)$$

同样,我们可以将(3)式右边的风切应力旋度项展成

$$\text{curl}_z T(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (13)$$

式中

$$F_n(x) = \int_0^b \text{curl}_z T(x, y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (14)$$

对于边界条件(7),同样可以展成

$$\varphi(a, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(a) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (15)$$

式中

$$\varphi_n(a) = \int_0^b \varphi(a, y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (16)$$

或者由于条件(10),得到

$$\varphi_n(a) = \frac{2b^2 u_0 \cos n\pi(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos n\pi\alpha_1}{\alpha_2 \pi^2 n(n^2 - 4/\alpha_2^2)} \quad (17)$$

这样,方程(3)可以写成

$$\frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} - \frac{2n^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \varphi_n = - \frac{F_n}{HA_1} \quad (18)$$

相应的边界条件为

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \varphi_n = 0, \frac{d\varphi_n}{dx} = 0 \quad (19)$$

$$\text{在 } x=a \text{ 处, } \varphi_n = \varphi_n(a), \frac{d\varphi_n}{dx} = 0 \quad (20)$$

若 $F_n(x)$ 与 x 无关,即

$$F_n(x) = R_n \quad (21)$$

式中, R_n 表示与 n 有关的常量,那末,(18)式的解可以写成为

$$\varphi_n(x) = (c_1 + c_2 x) \text{ch} \frac{n\pi x}{b} + (c_3 + c_4 x) \text{sh} \frac{n\pi x}{b} - \frac{b^4 R_n}{n^4 \pi^4 HA_1} \quad (22)$$

式中, c_1, c_2, c_3, c_4 为积分常数。它们可以由边界条件(19)式和(20)式求得

$$c_1 = \frac{b^4 R_n}{n^4 \pi^4 HA_1}$$

$$c_2 = -\frac{n\pi}{b} c_3$$

$$c_3 = \frac{\frac{b^4 R_n}{n^4 \pi^4 H A_l} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}\right) - \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} + \frac{n\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} - \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}}}{\frac{n\pi a}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \varphi_n(a) \quad (23)$$

$$c_4 = -\frac{\frac{b^3 R_n}{n^3 \pi^3 H A_l} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} - \frac{\frac{n^2 \pi^2 a}{b^2} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} - \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}}}{\frac{n\pi a}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \varphi_n(a) \quad (24)$$

因此,满足边界条件(4)–(7)式的方程(3)的解,可以写成为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{2b^3}{\pi^4 H A_l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4 \left(\frac{n\pi a}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \right)} \left[\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} (a-x) + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a-x) + \frac{n\pi}{b} (a-x) \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] \right\} \\ & \times R_n \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} - \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \left[\left(\frac{n\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{n^2 \pi^2 a x}{b^2} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right] \varphi_n(a) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (25) \end{aligned}$$

从(25)式中可以看出,半封闭海域内的环流分布形式主要取决于从口门流入和流出的流速分布,以及海面上风切应力旋度的分布。

当然,如果口门流速分布与本文(8)式和(9)式所给定的流速分布不一致,则(25)式的结果仍可应用,但是其中 $\varphi_n(a)$ 不是本文(17)式所给出的结果,而需根据口门流速分布情况另行推导。

三、在渤海内的应用

如果我们把渤海当作矩形海域,渤海海峡为其口门,取 $a = 2 \times 10^7$ 厘米, $b = 4 \times 10^7$ 厘米, $H = 25 \times 10^2$ 厘米, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.3$ 。

渤海海域内的风,具有季风性质,它有一定的季节性变化。但是从多年平均或统计特征来看,也有一定的分布规律。这里,我们把海面上的风切应力的东分量随纬度变化,近似地用下式表示

$$T_x = T_0 + T_2 e^{\frac{y}{4b}} \cos \frac{2\pi y}{b} \quad (26)$$

式中, T_0 、 T_2 均为常量。这样,风切应力旋度可以近似地写成

$$\text{curl}_z \mathbf{T} = \frac{\partial T_x}{\partial y} = \frac{T_2}{b} e^{\frac{y}{b}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{2\pi y}{b} - 2\pi \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (27)$$

由 (13) 式和 (14) 式可知

$$F_n = 4\pi T_2 \frac{n[1 + 16\pi^2(n^2 + 4)]}{[1 + 16\pi^2(n+2)^2][1 + 16\pi^2(n-2)^2]} (1 - e^{\frac{1}{4}} \cos n\pi) \quad (28)$$

由 (21) 式可知

$$R_n = F_n = 4\pi T_2 K_n \quad (29)$$

式中

$$K_n = \frac{n[1 + 16\pi^2(n^2 + 4)]}{[1 + 16\pi^2(n+2)^2][1 + 16\pi^2(n-2)^2]} (1 - e^{\frac{1}{4}} \cos n\pi) \quad (30)$$

由 (30) 式可以求得相应于 $n = 1, 2, 3, \dots$ 的 K_1, K_2, K_3 值。这里, 我们仅给出前 10 项的近似值, 列于表 1 中。

表 1 由 (30) 式计算求得的 K_n 值 (前 10 项)

符 号	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
量 值	0.0079	-0.284	0.022	-0.00099	0.0047	-0.00042	0.0026	-0.00027	0.0018	-0.00020

从表 1 中可以看出, K_2 的绝对值远大于其它各项的绝对值。因此, 在忽略小量的情况下, 我们仅考虑 $n = 2$ 项的风切应力效应, 从而 (25) 式可以写成

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{b^3}{8\pi^4 H A_1} \left\{ -1 + \frac{1}{\pi + \text{sh}\pi} \left[\text{sh} \frac{2\pi x}{b} + \frac{2\pi x}{b} \text{ch} \frac{2\pi}{b} (a - x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{sh} \frac{2\pi}{b} (a - x) + \frac{2\pi}{b} (a - x) \text{ch} \frac{2\pi x}{b} \right] \right\} R_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \\ & - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} - \text{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \left[\left(\frac{n\pi a}{b} \text{ch} \frac{n\pi a}{b} + \text{sh} \frac{n\pi a}{b} \right) \right. \\ & \left. \times \left(\text{sh} \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \text{ch} \frac{n\pi x}{b} \right) + \frac{n^2 \pi^2 a x}{b^2} \text{sh} \frac{n\pi a}{b} \text{sh} \frac{n\pi x}{b} \right] \varphi_n(a) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (31) \end{aligned}$$

从 (31) 式可以得到

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } \varphi(x, y) = 0 \quad (32)$$

$$\text{在 } x = a \text{ 处, } \varphi(x, y) = \varphi(a, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(a) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (33)$$

采用上面给定的 $a, b, H, \alpha_1, \alpha_2$ 值, 忽略小量, 由 (31) 式可以近似地得到

在 $x = \frac{a}{4}$ 处,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & -2.81474 \times 10^{15} \frac{R_2}{A_1} \sin \frac{2\pi y}{b} + 0.01559 \times 10^7 u_0 \sin \frac{\pi y}{b} \\ & + 0.01154 \times 10^7 u_0 \sin \frac{2\pi y}{b} - 0.00186 \times 10^7 u_0 \sin \frac{3\pi y}{b} \end{aligned}$$

$$- 0.00243 \times 10^7 u_0 \sin \frac{4\pi y}{b} \quad (34)$$

在 $x = \frac{a}{2}$ 处,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & -4.80298 \times 10^{15} \frac{R_2}{A_1} \sin \frac{2\pi y}{b} + 0.16372 \times 10^7 u_0 \sin \frac{\pi y}{b} \\ & + 0.05398 \times 10^7 u_0 \sin \frac{2\pi y}{b} - 0.00516 \times 10^7 u_0 \sin \frac{3\pi y}{b} \\ & - 0.01538 \times 10^7 u_0 \sin \frac{4\pi y}{b} - 0.00715 \times 10^7 u_0 \sin \frac{5\pi y}{b} \\ & + 0.00103 \times 10^7 u_0 \sin \frac{6\pi y}{b} + 0.00137 \times 10^7 u_0 \sin \frac{7\pi y}{b} \\ & + 0.00031 \times 10^7 u_0 \sin \frac{8\pi y}{b} \end{aligned} \quad (35)$$

在 $x = \frac{3a}{4}$ 处,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & -2.81474 \times 10^{15} \frac{R_2}{A_1} \sin \frac{2\pi y}{b} + 0.08302 \times 10^7 u_0 \sin \frac{\pi y}{b} \\ & + 0.06717 \times 10^7 u_0 \sin \frac{2\pi y}{b} - 0.01029 \times 10^7 u_0 \sin \frac{3\pi y}{b} \\ & - 0.04524 \times 10^7 u_0 \sin \frac{4\pi y}{b} - 0.02282 \times 10^7 u_0 \sin \frac{5\pi y}{b} \\ & + 0.00644 \times 10^7 u_0 \sin \frac{6\pi y}{b} + 0.01239 \times 10^7 u_0 \sin \frac{7\pi y}{b} \\ & + 0.00418 \times 10^7 u_0 \sin \frac{8\pi y}{b} - 0.00173 \times 10^7 u_0 \sin \frac{9\pi y}{b} \\ & - 0.00093 \times 10^7 u_0 \sin \frac{10\pi y}{b} - 0.00018 \times 10^7 u_0 \sin \frac{11\pi y}{b} \end{aligned} \quad (36)$$

其余各项,同样可以用上述方法进行近似计算。从上述各式中显然可以看出,环流分布取决于 $\frac{R_2}{A_1}$ 和 u_0 。

若海面风切应力旋度项值 $R_2 = 0$, 取 $u_0 = 25$ 厘米/秒, 那末环流分布的流线如图 2 所示。

若 $u_0 \approx 25$ 厘米/秒, 环流分布的形式不变, 仅变动其量值。

若取 $u_0 = 0$, 即口门处没有水量交换, 并取 $\frac{R_2}{A_1} = -1 \times 10^{-8}$, 在 $A_1 = 10^7$ 的情况下, $R_2 = -0.1$, 或者 $T_2 \approx 0.03$, 即相当于 1.8 米/秒的风速, 这就是通常的二级风的最小值。在这种情况下下的环流分布, 如图 3 所示。

若 $\frac{R_2}{A_1} \approx -1 \times 10^{-8}$, 仍为负值, 则环流分布的形式不变, 而仅变动其量值。若 $\frac{R_2}{A_1}$

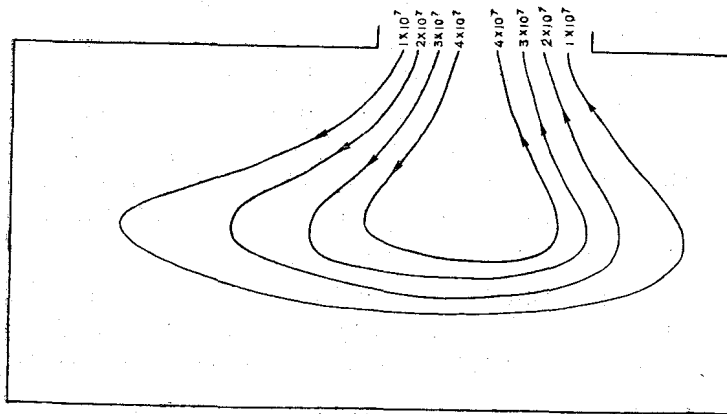


图2 口门流速分布产生的环流

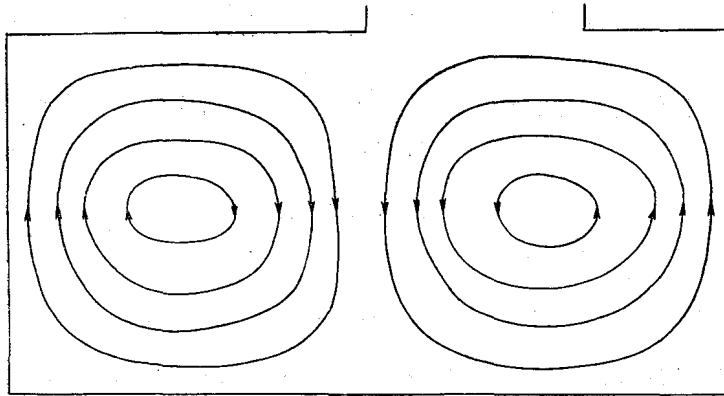


图 3 由风切应力旋度所产生的环流

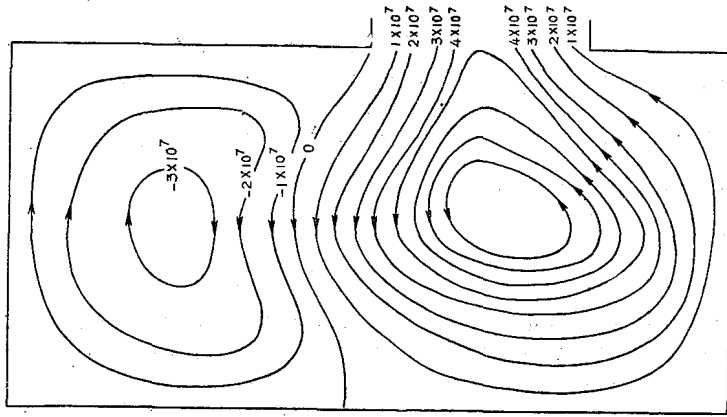


图 4 $u_0 = 2.5$, $R_* = -1 \times 10^{-8}$ 时的环流分布

为正值,则环流分布形式,与图3所示的旋转方向相反。显然, $\frac{R_2}{A_1}$ 为正值的风场分布形式,不能用(26)式表示,也就是说不符合于我们所给定的多年平均风场的近似表达式,应另行讨论。

关于由于口门流速分布和风切应力旋度所产生的渤海内的环流分布形式,我们取 $u_0 = 25$ 厘米/秒和 $\frac{R_2}{A_1} = -1 \times 10^{-8}$, 绘制了图4。图4所示结果,大体上与我们现有的渤海环流分布的定性结果趋向一致。

参 考 文 献

- [1] Munk, W. H., 1950. On the wind-driven ocean circulation, *Jour. Meteor.* 7(2): 79—93.
- [2] Munk, W. H. and G. F. Carrier, 1950. On the wind-driven circulation in ocean basins of various shapes. *Tellus* 2(3): 158—167.
- [3] Takano, K., 1954. Note on the influence of an inlet and intake upon the velocity distribution in the interior. *Jour. Ocean. Soc. Japan.* 10(3): 87—91.
- [4] Штокман, В. Б., 1946. Уравнения полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море. *ДАН СССР*, 54 (5): 407—410.
- [5] Штокман, В. Б., 1952. Премещение метода полных потоков для расчета циркуляции, возбуждаемой неравномерным ветром в море эллиптической формы. *Изв. АН СССР. сер. Геофиз.*, №. 5.

ON THE CIRCULATION PATTERN WITHIN A SEMI-CLOSED BASIN*

Yang Tianhong

(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

Based on Stockman's (1946) well-known total transport equation, i.e.

$$\nabla^4 \phi = - \frac{\text{curl}_z T}{A_1}$$

this paper discusses the circulation pattern within a rectangular uniform basin which communicating with the adjacent sea through an opening. Assume the north and south boundaries being sliding type, while the east and west boundaries (with the exception of the opening) being viscous type. The aim of this paper is to get a solution of Stockman's total transport equation with the fore mentioned boundary conditions. Because of the existence of a discontinuous point of the first kind on that boundary with an opening, we use Fourier method to obtain a solution in the series form for the whole basin. It is apparent from the solution that the circulation pattern within such a semi-closed basin is essentially determined by the wind stress curl on the basin and the velocity distribution at the opening.

Finally, we apply the above result to the Bohai Sea, it is to be seen that the circulation pattern of the Bohai Sea calculated by this method is quite similar with the observed circulation pattern of the Bohai Sea so far as the general feature is concerned.

* Contribution No. 508 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.