

计算水位分布的标准差—偏度—峰度 方法 (BPF 法)*

方国洪 王 骥 张锦文 曹德明

丁文兰 于克俊 朱雨楠

(中国科学院海洋研究所, 国家海洋局科技情报研究所)

海面水位各种高度的出现频率在海洋工程和航运中具有重要意义。为了得出其分布, 最直接和可靠的方法当然是利用长期实测资料进行统计。但是在需要获得水位分布的地点往往没有足够长期的资料, 这时就必须采用其他的方法来推算。

我国近海引起水位升降的主要因素是天文潮, 故利用潮汐调和常数推算天文潮并考虑到非天文因素的水位变化是一个比较可靠的办法。这个方法比较准确, 但需要进行潮汐预报, 计算量比较大。本文提出的方法所涉及的计算量很小, 但仍能获得较好的效果。这个方法的基本出发点是: 由于不同地点海面水位分布有一定的共性, 水位分布和它的数字特征之间有密切的关系, 而数字特征又决定于潮汐调和常数及非天文水位标准差, 因而可利用潮汐调和常数及非天文水位标准差求得数字特征, 然后进一步得出水位分布。这个方法所用到的数字特征为标准差、偏度和峰度, 它们汉语拼音的第一个字母分别为 B, P 和 F, 故这个方法被称为 BPF 法。

1977 年我们提出 BPF 法时, 主要应用于海图深度基准面, 应用中的有关问题将另文讨论。

一、基本依据

假定我们在某一时段 $[-T, T]$ 的随意一个时刻观察水位, 则观察时刻是在 $[-T, T]$ 上取值的随机变量, 我们将用符号 τ 来代表, 它所取的可能值用 t 来表示。同时我们假定 τ 在 $[-T, T]$ 内没有任何倾向性, 则 τ 遵从均匀分布, 即其分布密度为

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & \text{当 } |t| \leq T \\ 0, & \text{当 } |t| > T \end{cases} \quad (1)$$

另一方面, 对一定地点, 观察时刻的水位值决定于观察时刻, 即前者是后者的函数。但是观察时刻本身是随机的, 故观察到的水位值也是随机的。我们用 ζ 表示观察时刻的水

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 1271 号。本项工作在研究和推广过程中得到中国科学院海洋研究所、国家海洋局海洋科技情报研究所及其他单位许多同志的协助和支持, 作者谨表深切谢意。
收稿日期: 1985 年 10 月 6 日。

位值这个随机变量,而它可能的取值则用 z 表示。随机变量 ζ 和随机变量 τ 之间可用下列函数形式表达:

$$\zeta = \varphi(\tau) \quad (2)$$

因为 τ 的分布密度已由式 (1) 给出,它的单值函数 $\zeta = \varphi(\tau)$ 的分布也是唯一确定的。我们假定 ζ 的分布函数为 $F(z)$, 分布密度为 $f(z)$, 即 ζ 出现低于 z 的概率为

$$P\{\zeta < z\} = F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz. \quad (3)$$

假设已经知道该地在 $[-T, T]$ 期间所有时刻的实际水位, 则 $F(z)$ 可以用直接统计的方法得出。事实上, 如果我们以时间为横坐标, 水位为纵坐标画出水位连续变化的曲线, 同时作一与横坐标轴平行的水位等于 z 的直线, 就可以得出与低于 z 的水位相对应的时间区间 $I_1, I_2, I_3, \dots$ 。因为 τ 服从均匀分布, 故其取值落在区间 I_1 , 或 I_2 , 或 $I_3, \dots$ 的概率便等于 $S/2T$, 其中 S 为这些区间长度的总和。 τ 的取值落在上述区间内也就意味着 ζ 所取的值小于 z , 故观察到的水位低于 z 的概率也等于 $S/2T$, 它就是 $F(z)$ 。在实际统计的时候可以不用作图的方法。如果在区间 $[-T, T]$ 上每隔相同的时间间距取一个时间值, 若间距足够小, 则落在 $I_1, I_2, I_3, \dots$ 中的点子的个数与总点数的比值可充分接近 $S/2T$ 。因此, 为了得出 $S/2T$, 可以统计与小于 z 的水位相对应的离散点子的个数与总个数的比值。由于潮汐变化周期主要是全日和半日的, 故时间间距取为 1 小时进行统计一般即可满足实际要求。

当然, $[-T, T]$ 期间的实际水位值预先并不知道, 但是由于潮汐变化的周期性, 如果时段 $[-T, T]$ 足够长, 我们可以用以前的足够长的资料并用相同的方法得出 $F(z)$ 来近似代表 $[-T, T]$ 期间的 $F(z)$ 。不过这只有在历史资料比较充分时才能够做到。因此我们下面将给出一个不直接利用实际观测水位, 而是利用比较容易得到的潮汐调和常数来确定 $F(z)$ 的方法。

为方便起见, 我们以平均海面作为水位高度的起算面, 同时把 ζ 分解成两部分:

$$\zeta = \zeta_a + \zeta_b, \quad (4)$$

其中 ζ_a 与 τ 的关系由

$$\zeta_a = \varphi_a(\tau) = \sum_i H_i \cos(\sigma_i \tau - \theta_i) \quad (5)$$

确定。这里, $\sum_i$ 包括了所有在潮汐预报中使用的分潮, $\theta = g - V$, V 为天文初相角, H, g 为调和常数, σ 为分潮角速率。这里每一项代表一个纯调和分潮, 故不含通常用的交点系数 f 和相角订正值 u 。式 (4) 中 ζ_b 代表着气象影响的扰动水位。如果 ζ_a 和 ζ_b 互相独立, 则 $f(z)$ 便等于 ζ_a 和 ζ_b 的分布密度的卷积。由于 φ_a 的表达式太复杂, 不能用一个简单的式子来表示 ζ_a 的分布密度, 所以我们转而考虑采用别的近似的方法。

我们知道, 一个随机变量的分布函数跟它的数字特征有密切的关系, 如果知道了随机变量的各阶矩, 分布函数是可以确定下来的。下面来直观地说明一下当 $F(z)$ 等于一个小的正数 p 时, 对应的水位 z (这个水位下面将记为 z_p) 与各阶矩之间的关系。

一阶矩在这里就是平均海面。因为前面已规定水位是从平均海面起算的, 亦即 ζ 是已经中心化了的, 故一阶矩等于零。

二阶中心矩就是方差, 它的平方根即标准差, 我们用符号 δ 来记, 即

$$\delta = \sqrt{\mu_2} \quad (6)$$

这里用 μ_n 代表 n 阶中心矩。如所周知, δ 较大就表明 $|\zeta|$ 出现大的数值的机会较多, 因此对于一定的 p 值 (我们假定它是一个小的正数), 相应的 z_p 值应较小, 即 $|z_p|$ 应较大。所以 δ 是决定水位分布的一个最基本的要素。

但是对于潮汐, 即使在 δ 相同的情况下, 对不同地点其统计分布仍有着相当大的差异。因此还需要进一步考虑更高阶的中心矩。为了说明方便, 我们举出一些简单的例子。

假设甲、乙两个地点都只存在 M_2 , K_1 和 O_1 三个分潮, 并且两地相应分潮的振幅都相同, 例如分别为 100, 50 和 50 cm。显然这两处的方差相等, 都等于 $\frac{1}{2}(H_{M_2}^2 + H_{K_1}^2 + H_{O_1}^2) = 7500 \text{ cm}^2$, 或标准差均为 86.6 cm。但是如果其中甲地低潮不等显著而乙地低潮不等不显著, 则显然前者出现的最低水位要比后者低。例如当甲地的 $g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2}$ 等于 180° 而乙地为 0° , 则甲地低潮不等最显著而无高潮不等, 最低水位可达 -200 cm , 而乙地则高潮不等最显著而无低潮不等, 最低水位只能达到 -112.5 cm 。由此可知, 若 p 很小, 甲地的 z_p 将接近 -200 cm 而乙地的 z_p 应接近 -112.5 cm 。低潮不等现象可以在三阶中心矩中反映出来, 所以为了考虑低潮不等对水位分布的影响, 必须考虑三阶矩。三阶标准中心矩通常称为偏态系数或偏度, 记为 s ,

$$s = \frac{\mu_3}{\delta^3} \quad (7)$$

现在再来看另一种情况。在实际海洋中, 常常有一些地点只有一个分潮为主, 其余分潮均很小, 而另一些地点则可能有若干个彼此振幅相差不大的主要分潮同时存在。例如甲地只存在一个分潮, 其振幅为 100 cm; 乙地存在四个分潮, 其振幅都是 50 cm, 则两地的方差相同, 都等于 5000 cm^2 , 标准差都等于 70.7 cm。但是甲地的最低水位只能达到 -100 cm , 而乙地却有可能达到 -200 cm 。这一差异可以由四阶中心矩反映出来。例如上述甲、乙两地的四阶中心矩分别为 $3.75 \times 10^7 \text{ cm}^4$ 和 $6.5625 \times 10^7 \text{ cm}^4$ 。由于潮位的四阶标准中心矩通常变化于 1.5 到 3 之间 (在上例中, 甲地和乙地分别为 1.5 和 2.625, 对于一般情况下面另行讨论), 故我们这里定义

$$k = \frac{\mu_4}{\delta^4} - 2.25 \quad (8)$$

为峰度。

由此可知标准差是决定水位分布的最基本的要素, 而偏度和峰度对于水位分布也有着显著的影响。

由概率论知, 作为随机变量 τ 的函数 ζ , 在 τ 的分布为已知的情况下它的数字特征是容易算出的, 毋须预先求出 ζ 的分布。其公式是

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^n(t) g(t) dt \quad (9)$$

由式 (1) 可得

$$\mu_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi^n(t) dt \quad (10)$$

其实这个公式是很明显的。若将区间 $[-T, T]$ 划分为 N 个长度为 $\Delta t = \frac{2T}{N}$ 的等长的小区,第 i 个小区中点的水位值为 $\varphi(t_i)$,则上式可写作

$$\mu_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^N \varphi^n(t_i) \Delta t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi^n(t_i) \quad (11)$$

就是说,在 $[-T, T]$ 上等时间间隔地摘取水位值,其 n 次方的平均值就是 n 阶矩,这与上面谈到的用统计的方法计算 $F(z)$ 是完全一致的。

用有限阶矩来完全地反映出 ζ 的分布是不可能的,但是可以期望用 2—4 阶矩大体地把它反映出来。为了验证这个设想,我们选取了 60 多个验潮站,对每站由实测潮位确定对应于一个 p 值的水位 z_p ,同时由实测潮位统计出各站的统计参数 δ , s 和 k ,然后用最简单的关系式

$$\lambda = A + Bs + Ck \quad (12)$$

来拟合 $|z_p|/\delta$ 值。表 1 列出了当 $p = 0.1\%$ 至 0.5% 之间 $|z_p|/\delta$ 和实测 s , k 之间的相关系数,其值均在 0.9 以上。这样高的相关性表明潮位统计分布的特点是允许我们采用式 (12) 来表示 $|z_p|/\delta$ 的。表 1 中列出的仅是小概率的情况,在大概率的情况下(即 p 不很接近 0 或 1),相关系数还要大。不过在实用中由实测水位值来统计 δ , s , k 是不可取的,下面将讨论如何由潮汐调和常数以及气象条件扰动所引起的水位变化(简称气扰水位)的标准差来计算这些量。

表 1 实测 $|z_p|/\delta$ 与实测 s , k 的复相关系数

p	复相关系数	p	复相关系数
0.1%	0.908	0.4%	0.934
0.2%	0.920	0.5%	0.944
0.3%	0.929		

二、水位分布数字特征的计算

我们已假定潮位 ζ 可由式 (4) 和 (5) 表达。为了方便,假定 σ_i 是从小到大排列好了的,即当 $j > i$ 有 $\sigma_j > \sigma_i$ 。

ζ_b 在通常的潮汐预报中是不加考虑的,但在某些气象影响显著的海区,它对潮位统计分布有着不可忽视的影响。严格地说, ζ_b 中还包含着一些在潮汐分析和预报中被忽略掉的分潮,同时还包含着气象和天文潮之间的非线性效应。由于这些因素的作用比较复杂,并且比较次要,在以后的处理中将简单地把 ζ_a 与 ζ_b 看成是相互独立的,同时把 ζ_b 看成服从正态分布。如 ζ_b 的标准差已知为 δ_b ,则由正态分布律,立即可得它的各阶(中心)矩:

$$\begin{cases} \mu_{2b} = \delta_b^2 \\ \mu_{3b} = 0 \\ \mu_{4b} = 3\delta_b^4 \end{cases} \quad (13)$$

当然,实际上气扰水位并不是严格地服从正态分布的,就是说实际上 μ_{3b} 并不正好是零, μ_{4b}/δ_b^4 也不正好是 3。然而气象扰动对水位分布虽然有影响,但毕竟是一个次要的因素,而在这个次要因素中,二阶矩是主要的,三阶和四阶矩是这个次要因素中的次要因素,故为简单计,我们可以采用式 (13) 中的后两个式子。这不会带来太大误差。我们曾试验过,对 μ_{3b}/δ_b^3 和 μ_{4b}/δ_b^4 不采用 0 和 3,而用实测平均值代替,结果对 z_p 的影响绝大部分不超过 1 cm。

由 ζ_a 与 ζ_b 相互独立的假定可推得 ζ 的各阶矩 μ_n 与 ζ_a, ζ_b 的各阶矩 μ_{na}, μ_{nb} 之间的如下简单关系:

$$\begin{cases} \mu_2 = \mu_{2a} + \mu_{2b} \\ \mu_3 = \mu_{3a} + \mu_{3b} \\ \mu_4 = \mu_{4a} + 6\mu_{2a}\mu_{2b} + \mu_{4b} \end{cases} \quad (14)$$

由上两式可看出,只要知道 μ_{na}, μ_n 也就容易算得。下面就来讨论如何由调和常数计算 μ_{na} 值。

μ_{na} 是由下式确定的:

$$\mu_{na} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_a^n(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\sum_i H_i \cos(\sigma_i t - \theta_i) \right]^n dt \quad (15)$$

当 T 很大时, μ_{na} 将趋于某一确定的极限,因而我们将取

$$\mu_{na} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\sum_i H_i \cos(\sigma_i t - \theta_i) \right]^n dt \quad (16)$$

由式 (16) 很容易得出 ζ_a 的二阶矩:

$$\mu_{2a} = \frac{1}{2} \sum_i H_i^2 \quad (17)$$

这个式子虽然形式简单,但直接用来计算却很不方便,因为纯调和分潮的数目太多了。为了简化,首先我们把所有浅水分潮都略去,因为它们的振幅一般要比主要分潮至少小一个量级,平方之后作用就更小了。同时,在天文潮中,与月地及日地距离四次方以上有关的项,振幅不到主要分潮的大约 2%,故其方差值相对地完全可忽略。这样,剩下的仅有与月地及日地三次方有关的天文分潮。我们把它们分为四组,即 Doodson^[3] 的 10—14 群, 15—1 E 群, 20—26 群和 27—2 X 群。各组的主要分潮分别为 O_1, K_1, M_2 和 S_2 , 即 Doodson 数等于 145.555, 165.555, 255.555 和 273.555 这四项。对每一组,认为各实际的纯调和分潮之间的振幅比等于平衡潮的比值。例如对 10—14 群中的各分潮的振幅 H_i , 近似有

$$H_i = \frac{C_i}{C_{O_1}} H_{O_1} \quad (18)$$

其中 C 为平衡潮系数(见文献 [3] 第 55 页),因而有

$$\sum_{10-14\text{群}} H_i^2 = \left[\sum_{10-14\text{群}} (C_i/C_{O_1})^2 \right] H_{O_1}^2 = 1.077 H_{O_1}^2 \quad (19)$$

其余三组类似。此外还应考虑到水位的季节变化,它通常用分潮 S_a 和 S_{sa} 代表,于是最后可得

$$\mu_{2a} = \frac{1}{2} (H_{S_a}^2 + H_{S_{sa}}^2 + 1.077 H_{O_1}^2 + 1.138 H_{K_1}^2 + 1.042 H_{M_2}^2 + 1.084 H_{S_2}^2) \quad (20)$$

ζ_a 的三阶矩的推导要麻烦一些。因为

$$\begin{aligned} \varphi_a^3(t) = & \frac{1}{4} \sum_i H_i^3 [\cos 3(\sigma_i t - \theta_i) + 3 \cos(\sigma_i t - \theta_i)] \\ & + \frac{3}{4} \sum_{i \neq j} H_i^2 H_j [\cos \{(2\sigma_i - \sigma_j)t - (2\theta_i - \theta_j)\} \\ & + \cos \{(2\sigma_i + \sigma_j)t - (2\theta_i + \theta_j)\} + 2 \cos(\sigma_j t - \theta_j)] \\ & + \frac{3}{2} \sum_{k > j > i} H_i H_j H_k [\cos \{(\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k)t - (\theta_i + \theta_j + \theta_k)\} \\ & + \cos \{(\sigma_i + \sigma_j - \sigma_k)t - (\theta_i + \theta_j - \theta_k)\} \\ & + \cos \{(\sigma_i - \sigma_j + \sigma_k)t - (\theta_i - \theta_j + \theta_k)\} \\ & + \cos \{(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k)t - (\theta_i - \theta_j - \theta_k)\}] \end{aligned} \quad (21)$$

且前已假定 σ 是从小到大排列的,故有

$$\begin{aligned} \mu_{3a} = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_a^3(t) dt = \frac{3}{4} \sum_{\sigma_j = 2\sigma_i} H_i^2 H_j \cos(2\theta_i - \theta_j) \\ & + \frac{3}{2} \sum_{\substack{i > j \\ \sigma_k = \sigma_i + \sigma_j}} H_i H_j H_k \cos(\theta_i + \theta_j - \theta_k) \end{aligned} \quad (22)$$

就是说,当计算三阶矩时,只要考虑这样的分潮组:两个分潮,其中一个的角速率是另一个的二倍;或者三个分潮,其中一个的角速率是其余两个的和。适合这些条件的分潮组的数目相当多,不过由于三阶矩的重要性不如二阶矩,而且在所有符合上述条件的分潮组中,次要分潮的影响很小,故在实际计算中将只考虑下列几组: $(K_1, K_2), (M_2, M_4); (Q_1, K_1, N_2), (O_1, K_1, M_2), (P_1, K_1, S_2), (M_2, S_2, MS_4), (M_2, N_2, MN_4), (MS_f, M_2, S_2)$ 。这时,由式(22),并以 $(g - V)$ 代替 θ ,可得

$$\begin{aligned} \mu_{3a} = & \frac{3}{4} H_{K_1}^2 H_{K_2} \cos(2g_{K_1} - g_{K_2} + \pi) + \frac{3}{2} H_{Q_1} H_{K_1} H_{N_2} \cos(g_{Q_1} + g_{K_1} - g_{N_2}) \\ & + \frac{3}{2} H_{O_1} H_{K_1} H_{M_2} \cos(g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2}) + \frac{3}{2} H_{P_1} H_{K_1} H_{S_2} \cos(g_{P_1} + g_{K_1} - g_{S_2}) \\ & + \frac{3}{4} H_{M_2}^2 H_{M_4} \cos(2g_{M_2} - g_{M_4}) + \frac{3}{2} H_{M_2} H_{S_2} H_{MS_4} \cos(g_{M_2} + g_{S_2} - g_{MS_4}) \\ & + \frac{3}{2} H_{M_2} H_{N_2} H_{MN_4} \cos(g_{M_2} + g_{N_2} - g_{MN_4}) + \frac{3}{2} H_{MS_f} H_{M_2} H_{S_2} \cos(g_{MS_f} + g_{M_2} - g_{S_2}) \end{aligned} \quad (23)$$

为简单计,引用下列近似关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{O_1} = \frac{C_{O_1}}{C_{O_1}} H_{O_1} = 0.194 H_{O_1} \\ H_{P_1} = \frac{C_{P_1}}{C_{K_1}} H_{K_1} = 0.331 H_{K_1} \\ H_{N_2} = \frac{C_{N_2}}{C_{M_2}} H_{M_2} = 0.194 H_{M_2} \\ H_{K_2} = \frac{C_{K_2}}{C_{S_2}} H_{S_2} = 0.272 H_{S_2} \\ H_{MN_4} = 2 \frac{C_{N_2}}{C_{M_2}} H_{M_4} = 0.388 H_{M_4} \\ g_{O_1} - g_{O_1} = g_{N_2} - g_{M_2} \\ g_{P_1} = g_{K_1} \\ g_{K_2} = g_{S_2} \\ g_{MN_4} - g_{M_4} = g_{N_2} - g_{M_2}, \end{array} \right. \quad (24)$$

则式 (23) 可简化为

$$\begin{aligned} \mu_{3a} = & 0.292 H_{K_1}^2 H_{S_2} \cos(2g_{K_1} - g_{S_2}) + 1.557 H_{O_1} H_{K_1} H_{M_2} \cos(g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2}) \\ & + 0.863 H_{M_2}^2 H_{M_4} \cos(2g_{M_2} - g_{M_4}) + 1.5 H_{M_2} H_{S_2} H_{MS_4} \cos(g_{M_2} + g_{S_2} - g_{MS_4}) \\ & + 1.5 H_{MS_f} H_{M_2} H_{S_2} \cos(g_{MS_f} + g_{M_2} - g_{S_2}), \end{aligned} \quad (25)$$

更简略的计算可取

$$\begin{aligned} \mu_{3a} = & 1.75 H_{O_1} H_{K_1} H_{M_2} \cos(g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2}) \\ & + 1.5 [H_{M_2}^2 H_{M_4} \cos(2g_{M_2} - g_{M_4}) + H_{MS_f} H_{M_2} H_{S_2}] \end{aligned} \quad (26)$$

这里我们对式 (25) 中的次要项 (第 1, 4, 5 项) 引用了如下关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{K_1} = \frac{C_{K_1}}{C_{O_1}} H_{O_1} = 1.406 H_{O_1} \\ H_{S_2} = \frac{C_{S_2}}{C_{M_2}} H_{M_2} = 0.465 H_{M_2} \\ H_{MS_4} = 2 \frac{C_{S_2}}{C_{M_2}} H_{M_4} = 0.930 H_{M_4} \\ g_{K_1} - g_{O_1} = g_{S_2} - g_{M_2} = g_{MS_f} \end{array} \right. \quad (27)$$

最后, 我们来给出 ζ_a 的四阶矩。类似式 (22) 可得出

$$\begin{aligned} \mu_{4a} = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_a^4(t) dt = \frac{3}{8} \sum_i H_i^4 + \frac{3}{2} \sum_{j>i} H_i^2 H_j^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma_j=3\sigma_i} H_i^3 H_j \cos(3\theta_i - \theta_j) + \frac{3}{2} \sum_{\substack{j \neq i \\ \sigma_k=2\sigma_i+\sigma_j}} H_i^2 H_j H_k \cos(2\theta_i + \theta_j - \theta_k) \\ & + \frac{3}{2} \sum_{\substack{k>j \\ \sigma_k=2\sigma_i-\sigma_j}} H_i^2 H_j H_k \cos(2\theta_i - \theta_j - \theta_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \sum_{\substack{k>j>i \\ \sigma_l=\sigma_i+\sigma_j+\sigma_k}} H_i H_j H_k H_l \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k - \theta_l) \\
& + 3 \sum_{\substack{k>j>i \\ \sigma_l=\sigma_i+\sigma_j+\sigma_k}} H_i H_j H_k H_l \cos(\theta_i - \theta_j - \theta_k + \theta_l)
\end{aligned} \quad (28)$$

由于潮汐中主要成分是全日和半日分潮,故若浅水分潮不很大,上式第三、四、六项实际上很小。同时由于在同一潮族中,一个分潮的角速率是其余两个分潮角速率的平均值的情况也只在一些很小的分潮中存在,故第五项也很小。需要比较详细讨论的是最末一项,这里每一分潮组都是由四个不同的分潮所组成,其中两个分潮的角速率之和必须等于其余两个的角速率之和。满足这一条件的分潮组相当多,我们仅仅考虑其中最主要的几组,它们是 (O_1, P_1, M_2, S_2) , (O_1, K_1, M_2, K_2) , (P_1, K_1, S_2, K_2) , (Q_1, P_1, N_2, S_2) , (Q_1, O_1, N_2, M_2) , (Q_1, K_1, N_2, K_2) 。这时式 (28) 的最后一项便等于

$$\begin{aligned}
& 3[H_{O_1}H_{P_1}H_{M_2}H_{S_2}\cos(g_{O_1}+g_{S_2}-g_{P_1}-g_{M_2}) \\
& + H_{O_1}H_{K_1}H_{M_2}H_{K_2}\cos(g_{O_1}+g_{K_2}-g_{K_1}-g_{M_2}+\pi) \\
& + H_{P_1}H_{K_1}H_{S_2}H_{K_2}\cos(g_{P_1}+g_{K_2}-g_{K_1}-g_{S_2}+\pi) \\
& + H_{Q_1}H_{P_1}H_{N_2}H_{S_2}\cos(g_{Q_1}+g_{S_2}-g_{P_1}-g_{N_2}) \\
& + H_{Q_1}H_{O_1}H_{N_2}H_{M_2}\cos(g_{Q_1}+g_{M_2}-g_{O_1}-g_{N_2}) \\
& + H_{Q_1}H_{K_1}H_{N_2}H_{K_2}\cos(g_{Q_1}+g_{K_2}-g_{K_1}-g_{N_2}+\pi)] \approx 0.035H_{K_1}^2H_M^2
\end{aligned}$$

这里引用了近似关系 (24) 和 (27)。这样看来,这一项也是可以忽略的。因此式 (28) 可以只取前两项,即

$$\mu_{4a} = \frac{3}{8} \sum_i H_i^4 + \frac{3}{2} \sum_{i>j} H_i^2 H_j^2 \quad (29)$$

如果注意到

$$\sum_{i>j} H_i^2 H_j^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i H_i^2 \right)^2 - \sum_i H_i^4 \right] \quad (30)$$

则易知

$$\mu_{4a} = 3\mu_{2a}^2 - \frac{3}{8} \sum_i H_i^4 \quad (31)$$

在实际计算中,上式右边第二项可近似取为

$$\Delta = \frac{3}{8} \sum_i H_i^4 \approx 0.375 \sum_{C=S_a, S_{2a}, O_1, K_1, M_2, S_2} H_C^4 \quad (32)$$

将式 (13), (31), (32) 代入式 (14), 可得 ζ 的四阶标准中心矩为

$$\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 - \frac{\Delta}{\mu_2^2} \quad (33)$$

如果潮汐振幅远小于气象的扰动,或者有大量的彼此振幅相差不大的分潮存在,则 Δ/μ_2^2 将接近于零;反之当潮位仅由一个分潮的振动所决定时, $\Delta = \frac{3}{8} H^4$, $\mu_2 = \frac{1}{2} H^2$, 从而 $\Delta/\mu_2^2 = 1.5$ 。由此可知潮位的四阶标准中心矩一般变化于 1.5 到 3 之间。因此我们建议对潮位的分布,采用式 (8) 来定义峰度。这个定义与一般概率论中的定义不同,在那里,正态分布被看作具有中等峰度,而在这里则被看作是高峰度的。

综合上面的结果, 我们得到计算公式如下:

(1) 标准差

$$\delta = \left[\frac{1}{2} (1.077 H_{O_1}^2 + 1.138 H_{K_1}^2 + 1.042 H_{M_2}^2 + 1.084 H_{S_2}^2) + \frac{1}{2} (H_{S_a}^2 + H_{S_{sa}}^2) + \delta_b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

(2) 偏度

$$s = \frac{1}{\delta^3} [1.75 H_{O_1} H_{K_1} H_{M_2} \cos(g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2}) + 1.5 \{ H_{M_2}^2 H_{M_4} \cos(2g_{M_2} - g_{M_4}) + H_{MS_f} H_{M_2} H_{S_2} \}] \quad (35)$$

(3) 峰度

$$k = 0.75 - \frac{0.375}{\delta^4} (H_{O_1}^4 + H_{K_1}^4 + H_{M_2}^4 + H_{S_2}^4 + H_{S_a}^4 + H_{S_{sa}}^4) \quad (36)$$

三、对应各累积频率的水位的计算

根据式 (12), 我们把对应于累积频率为 p 的水位 z_p 表达为

$$z_p = (A_p + B_p s + C_p k) \delta \quad (37)$$

式中 δ, s, k 对一个地点为常数, 与式 (12) 不同, 它不是实测统计的结果, 而是由式 (34), (35) 和 (36) 计算得出的; 系数 A_p, B_p, C_p 则对不同频率采用不同的数值, 但它们与地点无关。

为了确定 A_p, B_p 和 C_p 的数值, 我们对我国沿岸 75 个资料长度在一年以上的验潮站进行了统计和计算。首先由观测水位记录统计出对应各个 p 值的水位高度 z_p , 同时由调和常数和气扰水位标准差按式 (34—36) 算出 δ, s 和 k 值, 然后对 z_p 和 $(\delta, s\delta, k\delta)$ 作多元回归分析, 求得系数 A_p, B_p 和 C_p 值。理论上, 当 $p_1 + p_2 = 100\%$ 时, A_{p_1}, B_{p_1} 和 C_{p_1} 应分别等于 A_{p_2}, B_{p_2} 和 C_{p_2} 。实际回归分析所得两者的数值也很接近, 故我们最后取两者的平均值代替它们。所得结果见表 2。表中我们还同时把复相关系数和标准偏差 (即实测统计值的 z_p 值与由回归方程 (37) 推算的值之差的均方根值) 也一并列出。可以看出, 相关系数是非常高的, 标准偏差一般很小。由此可知用式 (37) 推算 z_p 值可以获得相当好的结果。由于工程设计中习惯于用保证率 q , 其定义为 $q \equiv 100\% - p$ 。为方便计, 我们把 q 值亦在表 2 中列出。

计算 z_p 时需要的已知数据包括:

- (1) 潮汐调和常数 $H_{O_1}, H_{K_1}, H_{M_2}, H_{S_2}, H_{M_4}, H_{MS_f}, H_{S_a}, H_{S_{sa}}, g_{O_1}, g_{K_1}, g_{M_2}, g_{M_4}$;
- (2) 气扰水位标准差 δ_b 。

其中 O_1, K_1, M_2, S_2, M_4 分潮的调和常数可由一天以上的观测资料分析得出 (当然观测资料越多调和常数越可靠); H_{MS_f} 可由半个月以上资料分析得出 (也可由附近验潮站内插得出, 在江河中或河口区如本站观测资料不足一个月则以采用附近长期站的 H_{MS_f} 内插为宜); $H_{S_a}, H_{S_{sa}}$ 和 δ_b 需用至少一年资料分析才能得到 (如本站资料不足一年可由

表 2 对应各累积频率的系数 A, B, C 及相应的复相关系数和标准偏差

q (%)	p (%)	A	B	C	复相关 系数	标准 偏差 (cm)	q (%)	p (%)	A	B	C	复相关 系数	标准 偏差 (cm)
99.9	0.1	-2.33	0.81	-0.94	0.978	14.4	40	60	0.33	-0.27	-0.18	0.994	1.9
99.8	0.2	-2.25	0.79	-0.85	0.984	12.2	30	70	0.64	-0.15	-0.25	0.996	2.5
99.7	0.3	-2.20	0.77	-0.79	0.987	10.5	20	80	0.96	0.01	-0.18	0.996	3.3
99.6	0.4	-2.15	0.75	-0.73	0.990	9.4	10	90	1.34	0.25	0.03	0.997	3.6
99.5	0.5	-2.12	0.74	-0.69	0.992	8.5	9	91	1.38	0.28	0.06	0.997	3.6
99.4	0.6	-2.09	0.73	-0.66	0.993	8.0	8	92	1.43	0.32	0.09	0.998	3.5
99.3	0.7	-2.06	0.71	-0.63	0.994	7.4	7	93	1.48	0.35	0.13	0.998	3.5
99.2	0.8	-2.04	0.70	-0.61	0.994	7.0	6	94	1.53	0.39	0.17	0.998	3.4
99.1	0.9	-2.01	0.69	-0.58	0.995	6.7	5	95	1.60	0.43	0.22	0.998	3.6
99	1	-1.99	0.68	-0.57	0.995	6.4	4	96	1.66	0.48	0.27	0.998	3.7
98	2	-1.85	0.59	-0.43	0.997	4.9	3	97	1.75	0.53	0.34	0.998	4.0
97	3	-1.75	0.53	-0.34	0.998	4.1	2	98	1.85	0.59	0.43	0.997	4.7
96	4	-1.66	0.48	-0.27	0.998	3.9	1	99	1.99	0.68	0.57	0.996	5.9
95	5	-1.60	0.43	-0.22	0.998	3.7	0.9	99.1	2.01	0.69	0.58	0.996	6.1
94	6	-1.53	0.39	-0.17	0.998	3.8	0.8	99.2	2.04	0.70	0.61	0.996	6.1
93	7	-1.48	0.35	-0.13	0.998	3.8	0.7	99.3	2.06	0.71	0.63	0.995	6.4
92	8	-1.43	0.32	-0.09	0.997	3.9	0.6	99.4	2.09	0.73	0.66	0.995	6.7
91	9	-1.38	0.28	-0.06	0.997	3.8	0.5	99.5	2.12	0.74	0.69	0.994	7.1
90	10	-1.34	0.25	-0.03	0.997	3.8	0.4	99.6	2.15	0.75	0.73	0.993	7.7
80	20	-0.96	0.01	0.18	0.996	3.6	0.3	99.7	2.20	0.77	0.79	0.992	8.3
70	30	-0.64	-0.15	0.25	0.995	2.8	0.2	99.8	2.25	0.79	0.85	0.990	9.4
60	40	-0.33	-0.27	0.18	0.990	2.3	0.1	99.9	2.33	0.81	0.94	0.988	10.6
50	50	0.00	-0.30	0.00	0.897	2.5							

附近验潮站的数值内插得出)。

有了上列已知数据后,便可按式(34)~(36)计算本站的 δ, s, k 值,然后利用表 2 即可按式(37)算得对应各频率或保证率的水位高度。算得的高度系相对于长期平均海面而言。

手工计算时可借助附表 1 和 2 在一定的表格上进行,计算过程中均采用 m 为单位。下面是 A 站的计算实例。

(1) 根据 1973 年 6 月一个月的观测资料,经调和分析得到调和常数如下:

$$H_{O_1} = 0.28\text{m}, \quad g_{O_1} = 319^\circ$$

$$H_{K_1} = 0.33\text{m}, \quad g_{K_1} = 1^\circ$$

$$H_{M_2} = 0.67\text{m}, \quad g_{M_2} = 24^\circ$$

$$H_{S_2} = 0.19\text{m},$$

$$H_{M_4} = 0.08\text{m}, \quad g_{M_4} = 307^\circ$$

因本站位于黄埔附近,其他所需数据可采用黄埔港的,即

$$H_{S_a} = 0.16\text{m}, \quad H_{S_{sa}} = 0.06\text{m},$$

$$H_{MS_f} = 0.05\text{m}, \quad \delta_b = 0.16\text{m},$$

(2) 按表 3 的格式计算 δ, s, k , 整个表分为三部分,分别用来计算 δ, s 和 k 。

表 3 A 站 δ, s, k 的计算

 北纬 _____ 东经 _____ 资料来源 $MS_f, S_a, S_{sa}, \delta_b$ 根据黄埔港调和常数，
 其余由 1973 年 6 月 1—30 日资料分析得到

(1) 数据

	$H(m)$	g°	(2) 计算 δ		(3) 计算 k	
O_1	0.28	319	1. 由 H_{O_1} 查附表 1(3) 栏	0.042	10. 由 H_{O_1} 查附表 1(2) 栏	0.0061
K_1	0.33	1	2. 由 H_{K_1} 查附表 1(4) 栏	0.062	11. 由 H_{K_1} 查附表 1(2) 栏	0.0119
M_2	0.67	24	3. 由 H_{M_2} 查附表 1(5) 栏	0.234	12. 由 H_{M_2} 查附表 1(2) 栏	0.2015
S_2	0.19	=====	4. 由 H_{S_2} 查附表 1(6) 栏	0.020	13. 由 H_{S_2} 查附表 1(2) 栏	0.0013
M_4	0.08	307	=====	=====	=====	=====
MS_f	0.05	=====	=====	=====	=====	=====
S_a	0.16	=====	5. 由 H_{S_a} 查附表 1(7) 栏	0.013	14. 由 H_{S_a} 查附表 1(2) 栏	0.0007
S_{sa}	0.06	=====	6. 由 $H_{S_{sa}}$ 查附表 1(7) 栏	0.002	15. 由 $H_{S_{sa}}$ 查附表 1(2) 栏	0.0000
δ_b	0.16	=====	7. 由 δ_b 查附表 1(1) 栏	0.026	16. 对以上各栏求和得 Δ	0.2215
$\psi' = g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2}$		296	8. 对以上各栏求和得 δ^2	0.399	17. 由 Δ 查附表 1(8) 栏	-0.655
$\psi'' = 2g_{M_2} - g_{M_4}$		101	9. 由 δ^2 反查附表 1(1) 栏得 δ	0.63	18. 由 δ 查附表 1(11) 栏	0.377
					19. 对以上二栏求和得 $\lg k'$	-0.278
					20. 由 $\lg k'$ 反查附表 1(8) 栏得 k'	0.53
					21. 由 $0.75 - k'$ 得 k	0.22

 (4) 计算 s

s'		s''		s'''	
22. 由 H_{O_1} 查附表 1(8) 栏	-0.553	30. 由 H_{M_2} 查附表 1(8) 栏	-0.174	38. 由 H_{MS_f} 查附表 1(8) 栏	-1.301
23. 由 H_{K_1} 查附表 1(8) 栏	-0.481	31. 由 H_{M_2} 查附表 1(8) 栏	-0.174	39. 由 H_{M_2} 查附表 1(8) 栏	-0.174
24. 由 H_{M_2} 查附表 1(8) 栏	-0.174	32. 由 H_{M_4} 查附表 1(8) 栏	-1.097	40. 由 H_{S_2} 查附表 1(8) 栏	-0.721
25. 由 δ 查附表 1(9) 栏	0.845	33. 由 δ 查附表 1(10) 栏	0.778	41. 由 δ 查附表 1(10) 栏	0.778
26. 由 ψ' 查附表 2	-0.358	34. 由 ψ'' 查附表 2	-0.719	=====	=====
27. 对以上各栏求和得 $\lg s' $	-0.721	35. 对以上各栏求和得 $\lg s'' $	-1.386	42. 对以上各栏求和得 $\lg s'''$	-1.418
28. 由 $\lg s' $ 反查附表 1(8) 栏得 $ s' $	0.19	36. 由 $\lg s'' $ 反查附表 1(8) 栏得 $ s'' $	0.04	43. 由 $\lg s'''$ 反查附表 1(8) 栏得 s'''	0.04
29. 由 ψ' 确定 s' 的符号得 s'	0.19	37. 由 ψ'' 确定 s'' 的符号得 s''	-0.04	44. 由 $s' + s'' + s'''$ 得 s	0.19

* 若 $90^\circ < \psi' < 270^\circ$, 则 s' 为负; 否则为正。若 $\psi' = 90^\circ$ 或 270° , 则 $s' = 0$ (22—28 栏均不必计算)。 s'' 与 ψ'' 的关系同上。

表 4 A 站对应各累积频率的水位高度的计算

$\delta = 0.63 \text{ m}$, $s = 0.19$, $k = 0.22$, $d = 1.63 \text{ m}$ (d 为广州航道局确定的基准面深度)

B	C	A	(1) B_s	(2) Ck	(3) $A + \frac{(1)}{2} - \frac{(2)}{2}$	(4) $2 \times \frac{(1)}{2} - \frac{(2)}{2}$	q	p	(3) $\times \delta$	h z + d	q	p	(4) $\times \delta$	h z + d
0.81	-0.94	-2.33	0.15	-0.21	-2.39	2.69	99.9%	0.1%	-1.51	0.12	0.1%	99.9%	1.69	3.32
0.79	-0.85	-2.25	0.15	-0.19	-2.31	2.61	99.8	0.2	-1.46	0.17	0.2	99.8	1.64	3.27
0.77	-0.79	-2.20	0.15	-0.17	-2.22	2.52	99.7	0.3	-1.40	0.23	0.3	99.7	1.59	3.22
0.75	-0.73	-2.15	0.14	-0.16	-2.17	2.45	99.6	0.4	-1.37	0.26	0.4	99.6	1.54	3.17
0.74	-0.69	-2.12	0.14	-0.15	-2.13	2.41	99.5	0.5	-1.34	0.29	0.5	99.5	1.52	3.15
0.73	-0.66	-2.09	0.14	-0.15	-2.10	2.38	99.4	0.6	-1.32	0.31	0.6	99.4	1.50	3.13
0.71	-0.63	-2.06	0.13	-0.14	-2.07	2.33	99.3	0.7	-1.30	0.33	0.7	99.3	1.47	3.10
0.70	-0.61	-2.04	0.13	-0.13	-2.04	2.30	99.2	0.8	-1.29	0.34	0.8	99.2	1.45	3.08
0.69	-0.58	-2.01	0.13	-0.13	-2.01	2.27	99.1	0.9	-1.27	0.36	0.9	99.1	1.43	3.06
0.68	-0.57	-1.99	0.13	-0.13	-1.99	2.25	99	1	-1.25	0.38	1	99	1.42	3.05
0.59	-0.43	-1.85	0.11	-0.09	-1.83	2.05	98	2	-1.15	0.48	2	98	1.29	2.92
0.53	-0.34	-1.75	0.10	-0.07	-1.72	1.92	97	3	-1.08	0.55	3	97	1.21	2.84
0.48	-0.27	-1.66	0.09	-0.06	-1.63	1.81	96	4	-1.03	0.60	4	96	1.14	2.77
0.43	-0.22	-1.60	0.08	-0.05	-1.57	1.73	95	5	-0.99	0.64	5	95	1.09	2.72
0.39	-0.17	-1.53	0.07	-0.04	-1.50	1.64	94	6	-0.95	0.68	6	94	1.03	2.66
0.35	-0.13	-1.48	0.07	-0.03	-1.44	1.58	93	7	-0.91	0.72	7	93	1.00	2.63
0.32	-0.09	-1.43	0.06	-0.02	-1.39	1.51	92	8	-0.88	0.75	8	92	0.95	2.58
0.28	-0.06	-1.38	0.05	-0.01	-1.34	1.44	91	9	-0.84	0.79	9	91	0.91	2.54
0.25	-0.03	-1.34	0.05	-0.01	-1.30	1.40	90	10	-0.82	0.81	10	90	0.88	2.51
0.01	0.18	-0.96	0.00	0.04	-0.92	0.92	80	20	-0.58	1.05	20	80	0.58	2.21
-0.15	0.25	-0.64	-0.03	0.06	-0.61	0.55	70	30	-0.38	1.25	30	70	0.35	1.98
-0.27	0.18	-0.33	-0.05	0.04	-0.34	0.24	60	40	-0.21	1.42	40	60	0.15	1.78
-0.30	0.00	0.00	-0.06	0.00	-0.06	0.00	50	50	-0.04	1.59	50	60	0.15	1.78

附表 1 δ, s, k 计算用表

x	(1)	(2)	O_1	K_1	M_2	S_2	S_{2s}, S_{2sa}	(8)	δ		
			(3)	(4)	(5)	(6)	(7)		(9)	(10)	(11)
			$0.5385x^2$	$0.569x^2$	$0.521x^2$	$0.542x^2$	$0.500x^2$		$\lg 1.75x^{-3}$	$\lg 1.5x^{-3}$	$\lg 0.375x^{-4}$
0.00	0.000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	—	—	—	—
0.01	0.000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.000	6.243	6.176	7.574
0.02	0.000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.699	5.340	5.273	6.370
0.03	0.001	0.0000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	-1.523	4.812	4.745	5.666
0.04	0.002	0.0000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	-1.398	4.437	4.370	5.166
0.05	0.003	0.0000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	-1.301	4.146	4.079	4.778
0.06	0.004	0.0000	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	-1.222	3.909	3.842	4.461
0.07	0.005	0.0000	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	-1.155	3.708	3.641	4.194
0.08	0.006	0.0000	0.003	0.004	0.003	0.003	0.003	-1.097	3.534	3.467	3.962
0.09	0.008	0.0001	0.004	0.005	0.004	0.004	0.004	-1.046	3.380	3.313	3.757
0.10	0.010	0.0001	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005	-1.000	3.243	3.176	3.574
0.11	0.012	0.0001	0.007	0.007	0.006	0.007	0.006	-0.959	3.119	3.052	3.408
0.12	0.014	0.0002	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	-0.921	3.005	2.939	3.257
0.13	0.017	0.0003	0.009	0.010	0.009	0.009	0.008	-0.886	2.901	2.834	3.118
0.14	0.020	0.0004	0.011	0.011	0.010	0.011	0.010	-0.854	2.805	2.738	2.989
0.15	0.023	0.0005	0.012	0.013	0.012	0.012	0.011	-0.824	2.715	2.648	2.870
0.16	0.026	0.0007	0.014	0.015	0.013	0.014	0.013	-0.796	2.631	2.564	2.758
0.17	0.029	0.0008	0.016	0.016	0.015	0.016	0.014	-0.770	2.552	2.485	2.652
0.18	0.032	0.0010	0.017	0.018	0.017	0.018	0.016	-0.745	2.477	2.410	2.553
0.19	0.036	0.0013	0.019	0.021	0.019	0.020	0.018	-0.721	2.407	2.340	2.459
0.20	0.040	0.0016	0.022	0.023	0.021	0.022	0.020	-0.699	2.340	2.273	2.370
0.21	0.044	0.0019	0.024	0.025	0.023	0.024	0.022	-0.678	2.276	2.209	2.285
0.22	0.048	0.0023	0.026	0.028	0.025	0.026	0.024	-0.658	2.216	2.149	2.204
0.23	0.053	0.0028	0.028	0.030	0.028	0.029	0.026	-0.638	2.158	2.091	2.127
0.24	0.058	0.0033	0.031	0.033	0.030	0.031	0.029	-0.620	2.102	2.035	2.053
0.25	0.063	0.0039	0.034	0.036	0.033	0.034	0.031	-0.602	2.049	1.982	1.982
0.26	0.068	0.0046	0.036	0.038	0.035	0.037	0.034	-0.585	1.998	1.931	1.914
0.27	0.073	0.0053	0.039	0.041	0.038	0.040	0.036	-0.569	1.949	1.882	1.849
0.28	0.078	0.0061	0.042	0.045	0.041	0.042	0.039	-0.553	1.902	1.835	1.785
0.29	0.084	0.0071	0.045	0.048	0.044	0.046	0.042	-0.538	1.856	1.789	1.724
0.30	0.090	0.0081	0.048	0.051	0.047	0.049	0.045	-0.523	1.812	1.745	1.666
0.31	0.096	0.0092	0.052	0.055	0.050	0.052	0.048	-0.509	1.769	1.702	1.609
0.32	0.102	0.0105	0.055	0.058	0.053	0.056	0.051	-0.495	1.728	1.661	1.553
0.33	0.109	0.0119	0.059	0.062	0.057	0.059	0.054	-0.481	1.687	1.621	1.500
0.34	0.116	0.0134	0.062	0.066	0.060	0.063	0.058	-0.469	1.649	1.582	1.448
0.35	0.123	0.0150	0.066	0.070	0.064	0.066	0.061	-0.456	1.611	1.544	1.398
0.36	0.130	0.0168	0.070	0.074	0.068	0.070	0.065	-0.444	1.574	1.507	1.349
0.37	0.137	0.0187	0.074	0.078	0.071	0.074	0.068	-0.432	1.538	1.471	1.301
0.38	0.144	0.0209	0.078	0.082	0.075	0.078	0.072	-0.420	1.504	1.437	1.255
0.39	0.152	0.0231	0.082	0.087	0.079	0.082	0.076	-0.409	1.470	1.403	1.210
0.40	0.160	0.0256	0.086	0.091	0.083	0.087	0.080	-0.398	1.437	1.370	1.166
0.41	0.168	0.0283	0.091	0.096	0.088	0.091	0.084	-0.387	1.405	1.338	1.123
0.42	0.176	0.0311	0.095	0.100	0.092	0.096	0.088	-0.377	1.373	1.306	1.081
0.43	0.185	0.0342	0.100	0.105	0.096	0.100	0.092	-0.367	1.343	1.276	1.040
0.44	0.194	0.0375	0.104	0.110	0.101	0.105	0.097	-0.357	1.313	1.246	1.000
0.45	0.203	0.0410	0.109	0.115	0.106	0.110	0.101	-0.347	1.283	1.216	0.961
0.46	0.212	0.0448	0.114	0.120	0.110	0.115	0.106	-0.337	1.255	1.188	0.923
0.47	0.221	0.0488	0.119	0.126	0.115	0.120	0.110	-0.328	1.227	1.160	0.886
0.48	0.230	0.0531	0.124	0.131	0.120	0.125	0.115	-0.319	1.199	1.132	0.849
0.49	0.240	0.0576	0.129	0.137	0.125	0.130	0.120	-0.310	1.172	1.105	0.813

附表 1 (续)

x	(1)	(2)	O_1	K_1	M_2	S_2	S_{a2}, S_{sa}	(8)	δ		
			(3)	(4)	(5)	(6)	(7)		(9)	(10)	(11)
	x^2	x^4	$0.5385x^2$	$0.569x^2$	$0.521x^2$	$0.542x^2$	$0.500x^2$		$\lg 1.75x^{-3}$	$\lg 1.5x^{-3}$	$\lg 0.375x^{-4}$
0.50	0.250	0.0625	0.135	0.142	0.130	0.136	0.125	-0.301	1.146	1.079	0.778
0.51	0.260	0.0677	0.140	0.148	0.136	0.141	0.130	-0.292	1.120	1.053	0.744
0.52	0.270	0.0731	0.146	0.154	0.141	0.147	0.135	-0.284	1.095	1.028	0.710
0.53	0.281	0.0789	0.151	0.160	0.146	0.152	0.140	-0.276	1.070	1.003	0.677
0.54	0.292	0.0850	0.157	0.166	0.152	0.158	0.146	-0.268	1.046	0.979	0.644
0.55	0.303	0.0915	0.163	0.172	0.158	0.164	0.151	-0.260	1.022	0.955	0.613
0.56	0.314	0.0983	0.169	0.178	0.163	0.170	0.157	-0.252	0.998	0.932	0.581
0.57	0.325	0.1056	0.175	0.185	0.169	0.176	0.162	-0.244	0.975	0.908	0.551
0.58	0.336	0.1132	0.181	0.191	0.175	0.182	0.168	-0.237	0.953	0.886	0.520
0.59	0.348	0.1212	0.187	0.198	0.181	0.189	0.174	-0.229	0.930	0.864	0.491
0.60	0.360	0.1296	0.194	0.205	0.188	0.195	0.180	-0.222	0.909	0.842	0.461
0.61	0.372	0.1385	0.200	0.212	0.194	0.202	0.186	-0.215	0.887	0.820	0.433
0.62	0.384	0.1478	0.207	0.219	0.200	0.208	0.192	-0.208	0.866	0.799	0.404
0.63	0.397	0.1575	0.214	0.226	0.207	0.215	0.198	-0.201	0.845	0.778	0.377
0.64	0.410	0.1678	0.221	0.233	0.213	0.222	0.205	-0.194	0.824	0.758	0.349
0.65	0.423	0.1785	0.228	0.240	0.220	0.229	0.211	-0.187	0.804	0.737	0.322
0.66	0.436	0.1897	0.235	0.248	0.227	0.236	0.218	-0.180	0.784	0.717	0.296
0.67	0.449	0.2015	0.242	0.255	0.234	0.243	0.224	-0.174	0.765	0.698	0.270
0.68	0.462	0.2138	0.249	0.263	0.241	0.251	0.231	-0.167	0.746	0.679	0.244
0.69	0.476	0.2267	0.256	0.271	0.248	0.258	0.238	-0.161	0.726	0.660	0.219
0.70	0.490	0.2401	0.264	0.279	0.255	0.266	0.245	-0.155	0.708	0.641	0.194
0.71	0.504	0.2541	0.271	0.287	0.263	0.273	0.252	-0.149	0.689	0.622	0.169
0.72	0.518	0.2687	0.279	0.295	0.270	0.281	0.259	-0.143	0.671	0.604	0.145
0.73	0.533	0.2840	0.287	0.303	0.278	0.289	0.266	-0.137	0.653	0.586	0.121
0.74	0.548	0.2999	0.295	0.312	0.285	0.297	0.274	-0.131	0.635	0.568	0.097
0.75	0.563	0.3164	0.303	0.320	0.293	0.305	0.281	-0.125	0.618	0.551	0.074
0.76	0.578	0.3336	0.311	0.329	0.301	0.313	0.289	-0.119	0.601	0.534	0.051
0.77	0.593	0.3515	0.319	0.337	0.309	0.321	0.296	-0.114	0.584	0.517	0.028
0.78	0.608	0.3702	0.328	0.346	0.317	0.330	0.304	-0.108	0.567	0.500	0.006
0.79	0.624	0.3895	0.336	0.355	0.325	0.338	0.312	-0.102	0.550	0.483	-0.016
0.80	0.640	0.4096	0.345	0.364	0.333	0.347	0.320	-0.097	0.534	0.467	-0.038
0.81	0.656	0.4305	0.353	0.373	0.342	0.356	0.328	-0.092	0.518	0.451	-0.060
0.82	0.672	0.4521	0.362	0.383	0.350	0.364	0.336	-0.086	0.502	0.435	-0.081
0.83	0.689	0.4746	0.371	0.392	0.359	0.373	0.344	-0.081	0.486	0.419	-0.102
0.84	0.706	0.4979	0.380	0.401	0.368	0.382	0.353	-0.076	0.470	0.403	-0.123
0.85	0.723	0.5220	0.389	0.411	0.376	0.392	0.361	-0.071	0.455	0.388	-0.144
0.86	0.740	0.5470	0.398	0.421	0.385	0.401	0.370	-0.066	0.440	0.373	-0.164
0.87	0.757	0.5729	0.408	0.431	0.394	0.410	0.378	-0.060	0.424	0.358	-0.184
0.88	0.774	0.5997	0.417	0.441	0.403	0.420	0.387	-0.056	0.410	0.343	-0.204
0.89	0.792	0.6274	0.427	0.451	0.413	0.429	0.396	-0.051	0.395	0.328	-0.224
0.90	0.810	0.6561	0.436	0.461	0.422	0.439	0.405	-0.046	0.380	0.313	-0.243
0.91	0.828	0.6857	0.446	0.471	0.431	0.449	0.414	-0.041	0.366	0.299	-0.262
0.92	0.846	0.7164	0.456	0.482	0.441	0.459	0.423	-0.036	0.352	0.285	-0.281
0.93	0.865	0.7481	0.466	0.492	0.451	0.469	0.432	-0.032	0.338	0.271	-0.300
0.94	0.884	0.7807	0.476	0.503	0.460	0.479	0.442	-0.027	0.324	0.257	-0.318
0.95	0.903	0.8145	0.486	0.514	0.470	0.489	0.451	-0.022	0.310	0.243	-0.337
0.96	0.922	0.8493	0.496	0.524	0.480	0.500	0.461	-0.018	0.296	0.229	-0.355
0.97	0.941	0.8853	0.507	0.535	0.490	0.510	0.470	-0.013	0.283	0.216	-0.373
0.98	0.960	0.9224	0.517	0.546	0.500	0.521	0.480	-0.009	0.269	0.202	-0.391
0.99	0.980	0.9606	0.528	0.558	0.511	0.531	0.490	-0.004	0.256	0.189	-0.409

附表 1 (续)

x	(1)	(2)	O_1	K_1	M_2	S_2	$S_{22} S_{2a}$	(8)	δ		
			(3)	(4)	(5)	(6)	(7)		(9)	(10)	(11)
			$0.5385x^2$	$0.569x^2$	$0.521x^2$	$0.542x^2$	$0.500x^2$		$\lg 1.75x^{-3}$	$\lg 1.5x^{-3}$	$\lg 0.375x^{-4}$
1.00	1.000	1.0000	0.539	0.569	0.521	0.542	0.500	0.000	0.243	0.176	-0.426
1.01	1.020	1.0406	0.549	0.580	0.531	0.553	0.510	0.004	0.230	0.163	-0.443
1.02	1.040	1.0824	0.560	0.592	0.542	0.564	0.520	0.009	0.217	0.150	-0.460
1.03	1.061	1.1255	0.571	0.604	0.553	0.575	0.530	0.013	0.205	0.138	-0.477
1.04	1.082	1.1699	0.582	0.615	0.564	0.586	0.541	0.017	0.192	0.125	-0.494
1.05	1.103	1.2155	0.594	0.627	0.574	0.598	0.551	0.021	0.179	0.113	-0.511
1.06	1.124	1.2625	0.605	0.639	0.585	0.609	0.562	0.025	0.167	0.100	-0.527
1.07	1.145	1.3108	0.617	0.651	0.596	0.621	0.572	0.029	0.155	0.088	-0.544
1.08	1.166	1.3605	0.628	0.664	0.608	0.632	0.583	0.033	0.143	0.076	-0.560
1.09	1.188	1.4116	0.640	0.676	0.619	0.644	0.594	0.037	0.131	0.064	-0.576
1.10	1.210	1.4641	0.652	0.688	0.630	0.656	0.605	0.041	0.119	0.052	-0.592
1.11	1.232	1.5181	0.663	0.701	0.642	0.668	0.616	0.045	0.107	0.040	-0.607
1.12	1.254	1.5735	0.675	0.714	0.654	0.680	0.627	0.049	0.095	0.028	-0.623
1.13	1.277	1.6305	0.688	0.727	0.665	0.692	0.638	0.053	0.084	0.017	-0.638
1.14	1.300	1.6890	0.700	0.739	0.677	0.704	0.650	0.057	0.072	0.005	-0.654
1.15	1.323	1.7490	0.712	0.753	0.689	0.717	0.661	0.061	0.061	-0.006	-0.669
1.16	1.346	1.8106	0.725	0.766	0.701	0.729	0.673	0.064	0.050	-0.017	-0.684
1.17	1.369	1.8739	0.737	0.779	0.713	0.742	0.684	0.068	0.038	-0.028	-0.699
1.18	1.392	1.9388	0.750	0.792	0.725	0.755	0.696	0.072	0.027	-0.040	-0.713
1.19	1.416	2.0053	0.763	0.806	0.738	0.768	0.708	0.076	0.016	-0.051	-0.728
1.20	1.440	2.0736	0.775	0.819	0.750	0.780	0.720	0.079	0.005	-0.061	-0.743
1.21	1.464	2.1436	0.788	0.833	0.763	0.794	0.732	0.083	-0.005	-0.072	-0.757
1.22	1.488	2.2153	0.802	0.847	0.775	0.807	0.744	0.086	-0.016	-0.083	-0.771
1.23	1.513	2.2889	0.815	0.861	0.788	0.820	0.756	0.090	-0.027	-0.094	-0.786
1.24	1.538	2.3642	0.828	0.875	0.801	0.833	0.769	0.093	-0.037	-0.104	-0.800
1.25	1.563	2.4414	0.841	0.889	0.814	0.847	0.781	0.097	-0.048	-0.115	-0.814
1.26	1.588	2.5205	0.855	0.903	0.827	0.860	0.794	0.100	-0.058	-0.125	-0.827
1.27	1.613	2.6014	0.869	0.918	0.840	0.874	0.806	0.104	-0.068	-0.135	-0.841
1.28	1.638	2.6844	0.882	0.932	0.854	0.888	0.819	0.107	-0.079	-0.146	-0.855
1.29	1.664	2.7692	0.896	0.947	0.867	0.902	0.832	0.111	-0.089	-0.156	-0.868
1.30	1.690	2.8561	0.910	0.962	0.880	0.916	0.845	0.114	-0.099	-0.166	-0.882
1.31	1.716	2.9450	0.924	0.976	0.894	0.930	0.858	0.117	-0.109	-0.176	-0.895
1.32	1.742	3.0360	0.938	0.991	0.908	0.944	0.871	0.121	-0.119	-0.186	-0.908
1.33	1.769	3.1290	0.953	1.007	0.922	0.959	0.884	0.124	-0.129	-0.195	-0.921
1.34	1.796	3.2242	0.967	1.022	0.936	0.973	0.898	0.127	-0.138	-0.205	-0.934
1.35	1.823	3.3215	0.981	1.037	0.950	0.988	0.911	0.130	-0.148	-0.215	-0.947
1.36	1.850	3.4210	0.996	1.052	0.964	1.002	0.925	0.134	-0.158	-0.225	-0.960
1.37	1.877	3.5228	1.011	1.068	0.978	1.017	0.938	0.137	-0.167	-0.234	-0.973
1.38	1.904	3.6267	1.026	1.084	0.992	1.032	0.952	0.140	-0.177	-0.244	-0.985
1.39	1.932	3.7330	1.040	1.099	1.007	1.047	0.966	0.143	-0.186	-0.253	-0.998
1.40	1.960	3.8416	1.055	1.115	1.021	1.062	0.980	0.146	-0.195	-0.262	-1.010
1.41	1.988	3.9525	1.071	1.131	1.036	1.078	0.994	0.149	-0.205	-0.272	-1.023
1.42	2.016	4.0659	1.086	1.147	1.051	1.093	1.008	0.152	-0.214	-0.281	-1.035
1.43	2.045	4.1816	1.101	1.164	1.065	1.108	1.022	0.155	-0.223	-0.290	-1.047
1.44	2.074	4.2998	1.117	1.180	1.080	1.124	1.037	0.158	-0.232	-0.299	-1.059
1.45	2.103	4.4205	1.132	1.196	1.095	1.140	1.051	0.161	-0.241	-0.308	-1.071
1.46	2.132	4.5437	1.148	1.213	1.111	1.155	1.066	0.164	-0.250	-0.317	-1.083
1.47	2.161	4.6695	1.164	1.230	1.126	1.171	1.080	0.167	-0.259	-0.326	-1.095
1.48	2.190	4.7979	1.180	1.246	1.141	1.187	1.095	0.170	-0.268	-0.335	-1.107
1.49	2.220	4.9288	1.196	1.263	1.157	1.203	1.110	0.173	-0.277	-0.343	-1.119

附表 1 (续)

x	(1)	(2)	O_1	K_1	M_2	S_2	S_a, S_{ia}	(8)	δ		
			(3)	(4)	(5)	(6)	(7)		(9)	(10)	(11)
	x^2	x^4	$0.5385x^2$	$0.569x^2$	$0.521x^2$	$0.542x^2$	$0.500x^2$		$\lg x$	$\lg 1.75x^{-3}$	$\lg 0.375x^{-4}$
1.50	2.250	5.0625	1.212	1.280	1.172	1.220	1.125	0.176	-0.285	-0.352	-1.130
1.51	2.280	5.1989	1.228	1.297	1.188	1.236	1.140	0.179	-0.294	-0.361	-1.142
1.52	2.310	5.3379	1.244	1.315	1.204	1.252	1.155	0.182	-0.302	-0.369	-1.153
1.53	2.341	5.4798	1.261	1.332	1.220	1.269	1.170	0.185	-0.311	-0.378	-1.165
1.54	2.372	5.6245	1.277	1.349	1.236	1.285	1.186	0.188	-0.320	-0.386	-1.176
1.55	2.403	5.7720	1.294	1.367	1.252	1.302	1.201	0.190	-0.328	-0.395	-1.187
1.56	2.434	5.9224	1.310	1.385	1.268	1.319	1.217	0.193	-0.336	-0.403	-1.198
1.57	2.465	6.0757	1.327	1.403	1.284	1.336	1.232	0.196	-0.345	-0.412	-1.210
1.58	2.496	6.2320	1.344	1.420	1.301	1.353	1.248	0.199	-0.353	-0.420	-1.221
1.59	2.528	6.3913	1.361	1.438	1.317	1.370	1.264	0.201	-0.361	-0.428	-1.232
1.60	2.560	6.5536	1.379	1.457	1.334	1.388	1.280	0.204	-0.369	-0.436	-1.242
1.61	2.592	6.7190	1.396	1.475	1.350	1.405	1.296	0.207	-0.377	-0.444	-1.253
1.62	2.624	6.8875	1.413	1.493	1.367	1.422	1.312	0.210	-0.386	-0.452	-1.264
1.63	2.657	7.0591	1.431	1.512	1.384	1.440	1.328	0.212	-0.394	-0.460	-1.275
1.64	2.690	7.2339	1.448	1.530	1.401	1.458	1.345	0.215	-0.401	-0.468	-1.285
1.65	2.723	7.4120	1.466	1.549	1.418	1.476	1.361	0.217	-0.409	-0.476	-1.296
1.66	2.756	7.5933	1.484	1.568	1.436	1.494	1.378	0.220	-0.417	-0.484	-1.306
1.67	2.789	7.7780	1.502	1.587	1.453	1.512	1.394	0.223	-0.425	-0.492	-1.317
1.68	2.822	7.9659	1.520	1.606	1.470	1.530	1.411	0.225	-0.433	-0.500	-1.327
1.69	2.856	8.1573	1.538	1.625	1.488	1.548	1.428	0.228	-0.441	-0.508	-1.338
1.70	2.890	8.3521	1.556	1.644	1.506	1.566	1.445	0.230	-0.448	-0.515	-1.348
1.71	2.924	8.5504	1.575	1.664	1.523	1.585	1.462	0.233	-0.456	-0.523	-1.358
1.72	2.958	8.7521	1.593	1.683	1.541	1.603	1.479	0.236	-0.464	-0.530	-1.368
1.73	2.993	8.9575	1.612	1.703	1.559	1.622	1.496	0.238	-0.471	-0.538	-1.378
1.74	3.028	9.1664	1.630	1.723	1.577	1.641	1.514	0.241	-0.479	-0.546	-1.388
1.75	3.063	9.3789	1.649	1.743	1.596	1.660	1.531	0.243	-0.486	-0.553	-1.398
1.76	3.098	9.5951	1.668	1.763	1.614	1.679	1.549	0.246	-0.493	-0.560	-1.408
1.77	3.133	9.8151	1.687	1.783	1.632	1.698	1.566	0.248	-0.501	-0.568	-1.418
1.78	3.168	10.0388	1.706	1.803	1.651	1.717	1.584	0.250	-0.508	-0.575	-1.428
1.79	3.204	10.2663	1.725	1.823	1.669	1.737	1.602	0.253	-0.516	-0.582	-1.437
1.80	3.240	10.4976	1.745	1.844	1.688	1.756	1.620	0.255	-0.523	-0.590	-1.447
1.81	3.276	10.7328	1.764	1.864	1.707	1.776	1.638	0.258	-0.530	-0.597	-1.457
1.82	3.312	10.9720	1.784	1.885	1.726	1.795	1.656	0.260	-0.537	-0.604	-1.466
1.83	3.349	11.2151	1.803	1.906	1.745	1.815	1.674	0.262	-0.544	-0.611	-1.476
1.84	3.386	11.4623	1.823	1.926	1.764	1.835	1.693	0.265	-0.551	-0.618	-1.485
1.85	3.423	11.7135	1.843	1.947	1.783	1.855	1.711	0.267	-0.558	-0.625	-1.495
1.86	3.460	11.9688	1.863	1.969	1.802	1.875	1.730	0.270	-0.565	-0.632	-1.504
1.87	3.497	12.2283	1.883	1.990	1.822	1.895	1.748	0.272	-0.572	-0.639	-1.513
1.88	3.534	12.4920	1.903	2.011	1.841	1.916	1.767	0.274	-0.579	-0.646	-1.523
1.89	3.572	12.7599	1.924	2.033	1.861	1.936	1.786	0.276	-0.586	-0.653	-1.532
1.90	3.610	13.0321	1.944	2.054	1.881	1.957	1.805	0.279	-0.593	-0.660	-1.541
1.91	3.648	13.3086	1.965	2.076	1.901	1.977	1.824	0.281	-0.600	-0.667	-1.550
1.92	3.686	13.5895	1.985	2.098	1.921	1.998	1.843	0.283	-0.607	-0.674	-1.559
1.93	3.725	13.8749	2.006	2.119	1.941	2.019	1.862	0.286	-0.614	-0.681	-1.568
1.94	3.764	14.1647	2.027	2.141	1.961	2.040	1.882	0.288	-0.620	-0.687	-1.577
1.95	3.803	14.4590	2.048	2.164	1.981	2.061	1.901	0.290	-0.627	-0.694	-1.586
1.96	3.842	14.7579	2.069	2.186	2.001	2.082	1.921	0.292	-0.634	-0.701	-1.595
1.97	3.881	15.0614	2.090	2.208	2.022	2.103	1.940	0.294	-0.640	-0.707	-1.604
1.98	3.920	15.3695	2.111	2.231	2.043	2.125	1.960	0.297	-0.647	-0.714	-1.613
1.99	3.960	15.6824	2.133	2.253	2.063	2.146	1.980	0.299	-0.654	-0.720	-1.621

附表 1 (续)

			O_1	K_1	M_2	S_2	S_a, S_{sa}		δ		
x	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
	x^2	x^4	$0.5385x^2$	$0.569x^2$	$0.521x^2$	$0.542x^2$	$0.500x^2$	$\lg x$	$\lg 1.75x^{-3}$	$\lg 1.5x^{-3}$	$\lg 0.375x^4$
2.00	4.000	16.0000	2.154	2.276	2.084	2.168	2.000	0.301	-0.660	-0.727	-1.630
2.01	4.040	16.3224	2.176	2.299	2.105	2.190	2.020	0.303	-0.667	-0.733	-1.639
2.02	4.080	16.6497	2.197	2.322	2.126	2.212	2.040	0.305	-0.673	-0.740	-1.647
2.03	4.121	16.9818	2.219	2.345	2.147	2.234	2.060	0.307	-0.679	-0.746	-1.656
2.04	4.162	17.3189	2.241	2.368	2.168	2.256	2.081	0.310	-0.686	-0.753	-1.664
2.05	4.203	17.6610	2.263	2.391	2.190	2.278	2.101	0.312	-0.692	-0.759	-1.673
2.06	4.244	18.0081	2.285	2.415	2.211	2.300	2.122	0.314	-0.699	-0.766	-1.681
2.07	4.285	18.3604	2.307	2.438	2.232	2.322	2.142	0.316	-0.705	-0.772	-1.690
2.08	4.326	18.7177	2.330	2.462	2.254	2.345	2.163	0.318	-0.711	-0.778	-1.698
2.09	4.368	19.0803	2.352	2.485	2.276	2.368	2.184	0.320	-0.717	-0.784	-1.707
2.10	4.410	19.4481	2.375	2.509	2.298	2.390	2.205	0.322	-0.724	-0.791	-1.715
2.11	4.452	19.8212	2.397	2.533	2.320	2.413	2.226	0.324	-0.730	-0.797	-1.723
2.12	4.494	20.1996	2.420	2.557	2.342	2.436	2.247	0.326	-0.736	-0.803	-1.731
2.13	4.537	20.5835	2.443	2.581	2.364	2.459	2.268	0.328	-0.742	-0.809	-1.739
2.14	4.580	20.9727	2.466	2.606	2.386	2.482	2.290	0.330	-0.748	-0.815	-1.748
2.15	4.623	21.3675	2.489	2.630	2.408	2.505	2.311	0.332	-0.754	-0.821	-1.756
2.16	4.666	21.7678	2.512	2.655	2.431	2.529	2.333	0.334	-0.760	-0.827	-1.764
2.17	4.709	22.1737	2.536	2.679	2.453	2.552	2.354	0.336	-0.766	-0.833	-1.772
2.18	4.752	22.5853	2.559	2.704	2.476	2.576	2.376	0.338	-0.772	-0.839	-1.780
2.19	4.796	23.0026	2.583	2.729	2.499	2.599	2.398	0.340	-0.778	-0.845	-1.788
2.20	4.840	23.4256	2.606	2.754	2.522	2.623	2.420	0.342	-0.784	-0.851	-1.796
2.21	4.884	23.8544	2.630	2.779	2.545	2.647	2.442	0.344	-0.790	-0.857	-1.804
2.22	4.928	24.2891	2.654	2.804	2.568	2.671	2.464	0.346	-0.796	-0.863	-1.811
2.23	4.973	24.7297	2.678	2.830	2.591	2.695	2.486	0.348	-0.802	-0.869	-1.819
2.24	5.018	25.1762	2.702	2.855	2.614	2.720	2.509	0.350	-0.808	-0.875	-1.827
2.25	5.063	25.6289	2.726	2.881	2.638	2.744	2.531	0.352	-0.814	-0.880	-1.835
2.26	5.108	26.0876	2.750	2.906	2.661	2.768	2.554	0.354	-0.819	-0.886	-1.842
2.27	5.153	26.5524	2.775	2.932	2.685	2.793	2.576	0.356	-0.825	-0.892	-1.850
2.28	5.198	27.0234	2.799	2.958	2.708	2.818	2.599	0.358	-0.831	-0.898	-1.858
2.29	5.244	27.5006	2.824	2.984	2.732	2.842	2.622	0.360	-0.836	-0.903	-1.865
2.30	5.290	27.9841	2.849	3.010	2.756	2.867	2.645	0.362	-0.842	-0.909	-1.873
2.31	5.336	28.4740	2.873	3.036	2.780	2.892	2.668	0.364	-0.848	-0.915	-1.880
2.32	5.382	28.9702	2.898	3.063	2.804	2.917	2.691	0.365	-0.853	-0.920	-1.888
2.33	5.429	29.4730	2.923	3.089	2.828	2.942	2.714	0.367	-0.859	-0.926	-1.895
2.34	5.476	29.9822	2.949	3.116	2.853	2.968	2.738	0.369	-0.865	-0.932	-1.903
2.35	5.523	30.4980	2.974	3.142	2.877	2.993	2.761	0.371	-0.870	-0.937	-1.910
2.36	5.570	31.0204	2.999	3.169	2.902	3.019	2.785	0.373	-0.876	-0.943	-1.918
2.37	5.617	31.5496	3.025	3.196	2.926	3.044	2.808	0.375	-0.881	-0.948	-1.925
2.38	5.664	32.0854	3.050	3.223	2.951	3.070	2.832	0.377	-0.887	-0.954	-1.932
2.39	5.712	32.6281	3.076	3.250	2.976	3.096	2.856	0.378	-0.892	-0.959	-1.940
2.40	5.760	33.1776	3.102	3.277	3.001	3.122	2.880	0.380	-0.898	-0.965	-1.947
2.41	5.808	33.7340	3.128	3.305	3.026	3.148	2.904	0.382	-0.903	-0.970	-1.954
2.42	5.856	34.2974	3.154	3.332	3.051	3.174	2.928	0.384	-0.908	-0.975	-1.961
2.43	5.905	34.8678	3.180	3.360	3.076	3.200	2.952	0.386	-0.914	-0.981	-1.968
2.44	5.954	35.4454	3.206	3.388	3.102	3.227	2.977	0.387	-0.919	-0.986	-1.976
2.45	6.003	36.0300	3.232	3.415	3.127	3.253	3.001	0.389	-0.924	-0.991	-1.983
2.46	6.052	36.6219	3.259	3.443	3.153	3.280	3.026	0.391	-0.930	-0.997	-1.990
2.47	6.101	37.2210	3.285	3.471	3.179	3.307	3.050	0.393	-0.935	-1.002	-1.997
2.48	6.150	37.8274	3.312	3.500	3.204	3.334	3.075	0.394	-0.940	-1.007	-2.004
2.49	6.200	38.4412	3.339	3.528	3.230	3.360	3.100	0.396	-0.946	-1.013	-2.011

附表 1 (续)

x	(1)	(2)	O ₁	K ₁	M ₂	S ₂	S ₂₂ S _{2a}	(8)	δ		
			(3)	(4)	(5)	(6)	(7)		(9)	(10)	(11)
			x ²	x ⁴	0.5385x ²	0.569x ²	0.521x ²		0.542x ²	0.500x ²	lgx
2.50	6.250	39.0625	3.366	3.556	3.256	3.388	3.125	0.398	-0.951	-1.018	-2.018
2.51	6.300	39.6913	3.393	3.585	3.282	3.415	3.150	0.400	-0.956	-1.023	-2.025
2.52	6.350	40.3276	3.420	3.613	3.309	3.442	3.175	0.401	-0.961	-1.028	-2.032
2.53	6.401	40.9715	3.447	3.642	3.335	3.469	3.200	0.403	-0.966	-1.033	-2.038
2.54	6.452	41.6231	3.474	3.671	3.361	3.497	3.226	0.405	-0.971	-1.038	-2.045
2.55	6.503	42.2825	3.502	3.700	3.388	3.524	3.251	0.407	-0.977	-1.044	-2.052
2.56	6.554	42.9497	3.529	3.729	3.414	3.552	3.277	0.408	-0.982	-1.049	-2.059
2.57	6.605	43.6247	3.557	3.758	3.441	3.580	3.302	0.410	-0.987	-1.054	-2.066
2.58	6.656	44.3077	3.584	3.787	3.468	3.608	3.328	0.412	-0.992	-1.059	-2.072
2.59	6.708	44.9986	3.612	3.817	3.495	3.636	3.354	0.413	-0.997	-1.064	-2.079
2.60	6.760	45.6976	3.640	3.846	3.522	3.664	3.380	0.415	-1.002	-1.069	-2.086
2.61	6.812	46.4047	3.668	3.876	3.549	3.692	3.406	0.417	-1.007	-1.074	-2.093
2.62	6.864	47.1200	3.696	3.906	3.576	3.721	3.432	0.418	-1.012	-1.079	-2.099
2.63	6.917	47.8435	3.725	3.936	3.604	3.749	3.458	0.420	-1.017	-1.084	-2.106
2.64	6.970	48.5753	3.753	3.966	3.631	3.778	3.485	0.422	-1.022	-1.089	-2.112
2.65	7.023	49.3155	3.782	3.996	3.659	3.806	3.511	0.423	-1.027	-1.094	-2.119
2.66	7.076	50.0641	3.810	4.026	3.686	3.835	3.538	0.425	-1.032	-1.099	-2.125
2.67	7.129	50.8212	3.839	4.056	3.714	3.864	3.564	0.427	-1.036	-1.103	-2.132
2.68	7.182	51.5869	3.868	4.087	3.742	3.893	3.591	0.428	-1.041	-1.108	-2.138
2.69	7.236	52.3611	3.897	4.117	3.770	3.922	3.618	0.430	-1.046	-1.113	-2.145
2.70	7.290	53.1441	3.926	4.148	3.798	3.951	3.645	0.431	-1.051	-1.118	-2.151
2.71	7.344	53.9358	3.955	4.179	3.826	3.981	3.672	0.433	-1.056	-1.123	-2.158
2.72	7.398	54.7363	3.984	4.210	3.855	4.010	3.699	0.435	-1.061	-1.128	-2.164
2.73	7.453	55.5457	4.013	4.241	3.883	4.039	3.726	0.436	-1.065	-1.132	-2.171
2.74	7.508	56.3641	4.043	4.272	3.911	4.069	3.754	0.438	-1.070	-1.137	-2.177
2.75	7.563	57.1914	4.072	4.303	3.940	4.099	3.781	0.439	-1.075	-1.142	-2.183
2.76	7.618	58.0278	4.102	4.334	3.969	4.129	3.809	0.441	-1.080	-1.147	-2.190
2.77	7.673	58.8734	4.132	4.366	3.998	4.159	3.836	0.442	-1.084	-1.151	-2.196
2.78	7.728	59.7282	4.162	4.397	4.026	4.189	3.864	0.444	-1.089	-1.156	-2.202
2.79	7.784	60.5922	4.192	4.429	4.056	4.219	3.892	0.446	-1.094	-1.161	-2.208
2.80	7.840	61.4656	4.222	4.461	4.085	4.249	3.920	0.447	-1.098	-1.165	-2.215
2.81	7.896	62.3484	4.252	4.493	4.114	4.280	3.948	0.449	-1.103	-1.170	-2.221
2.82	7.952	63.2407	4.282	4.525	4.143	4.310	3.976	0.450	-1.108	-1.175	-2.227
2.83	8.009	64.1425	4.313	4.557	4.173	4.341	4.004	0.452	-1.112	-1.179	-2.233
2.84	8.066	65.0539	4.343	4.589	4.202	4.372	4.033	0.453	-1.117	-1.184	-2.239
2.85	8.123	65.9750	4.374	4.622	4.232	4.402	4.061	0.455	-1.121	-1.188	-2.245
2.86	8.180	66.9059	4.405	4.654	4.262	4.433	4.090	0.456	-1.126	-1.193	-2.251
2.87	8.237	67.8465	4.436	4.687	4.291	4.464	4.118	0.458	-1.131	-1.198	-2.257
2.88	8.294	68.7971	4.467	4.720	4.321	4.496	4.147	0.459	-1.135	-1.202	-2.264
2.89	8.352	69.7576	4.498	4.752	4.351	4.527	4.176	0.461	-1.140	-1.207	-2.270
2.90	8.410	70.7281	4.529	4.785	4.382	4.558	4.205	0.462	-1.144	-1.211	-2.276
2.91	8.468	71.7087	4.560	4.818	4.412	4.590	4.234	0.464	-1.149	-1.216	-2.282
2.92	8.526	72.6995	4.591	4.852	4.442	4.621	4.263	0.465	-1.153	-1.220	-2.287
2.93	8.585	73.7005	4.623	4.885	4.473	4.653	4.292	0.467	-1.158	-1.225	-2.293
2.94	8.644	74.7118	4.655	4.918	4.503	4.685	4.322	0.468	-1.162	-1.229	-2.299
2.95	8.703	75.7335	4.686	4.952	4.534	4.717	4.351	0.470	-1.166	-1.233	-2.305
2.96	8.762	76.7656	4.718	4.985	4.565	4.749	4.381	0.471	-1.171	-1.238	-2.311
2.97	8.821	77.8083	4.750	5.019	4.596	4.781	4.410	0.473	-1.175	-1.242	-2.317
2.98	8.880	78.8615	4.782	5.053	4.627	4.813	4.440	0.474	-1.180	-1.247	-2.323
2.99	8.940	79.9254	4.814	5.087	4.658	4.846	4.470	0.476	-1.184	-1.251	-2.329

附表2 由 ϕ, ϕ' 查 $\lg|\cos\phi|, \lg|\cos\phi'|$

ϕ°	$\lg \cos\phi $	ϕ°	$\lg \cos\phi $
0 180 180 360	0.000	45 135 225 315	-0.151
1 179 181 359	0.000	46 134 226 314	-0.158
2 178 182 358	0.000	47 133 227 313	-0.166
3 177 183 357	-0.001	48 132 228 312	-0.174
4 176 184 356	-0.001	49 131 229 311	-0.183
5 175 185 355	-0.002	50 130 230 310	-0.192
6 174 186 354	-0.002	51 129 231 309	-0.201
7 173 187 353	-0.003	52 128 232 308	-0.211
8 172 188 352	-0.004	53 127 233 307	-0.221
9 171 189 351	-0.005	54 126 234 306	-0.231
10 170 190 350	-0.007	55 125 235 305	-0.241
11 169 191 349	-0.008	56 124 236 304	-0.252
12 168 192 348	-0.010	57 123 237 303	-0.264
13 167 193 347	-0.011	58 122 238 302	-0.276
14 166 194 346	-0.013	59 121 239 301	-0.288
15 165 195 345	-0.015	60 120 240 300	-0.301
16 164 196 344	-0.017	61 119 241 299	-0.314
17 163 197 343	-0.019	62 118 242 298	-0.328
18 162 198 342	-0.022	63 117 243 297	-0.343
19 161 199 341	-0.024	64 116 244 296	-0.358
20 160 200 340	-0.027	65 115 245 295	-0.374
21 159 201 339	-0.030	66 114 246 294	-0.391
22 158 202 338	-0.033	67 113 247 293	-0.408
23 157 203 337	-0.036	68 112 248 292	-0.426
24 156 204 336	-0.039	69 111 249 291	-0.446
25 155 205 335	-0.043	70 110 250 290	-0.466
26 154 206 334	-0.046	71 109 251 289	-0.487
27 153 207 333	-0.050	72 108 252 288	-0.510
28 152 208 332	-0.054	73 107 253 287	-0.534
29 151 209 331	-0.058	74 106 254 286	-0.560
30 150 210 330	-0.062	75 105 255 285	-0.587
31 149 211 329	-0.067	76 104 256 284	-0.616
32 148 212 328	-0.072	77 103 257 283	-0.648
33 147 213 327	-0.076	78 102 258 282	-0.682
34 146 214 326	-0.081	79 101 259 281	-0.719
35 145 215 325	-0.087	80 100 260 280	-0.760
36 144 216 324	-0.092	81 99 261 279	-0.806
37 143 217 323	-0.098	82 98 262 278	-0.856
38 142 218 322	-0.103	83 97 263 277	-0.914
39 141 219 321	-0.109	84 96 264 276	-0.981
40 140 220 320	-0.116	85 95 265 275	-1.060
41 139 221 317	-0.122	86 94 266 274	-1.156
42 138 222 318	-0.129	87 93 267 273	-1.281
43 137 223 317	-0.136	88 92 268 272	-1.457
44 136 224 316	-0.143	89 91 269 271	-1.758

δ 的计算十分简单, 由式 (34) 知 $\delta^2 = 0.5385H_{0_1}^2 + 0.569H_{K_1}^2 + \cdots + 0.5H_{s_{sa}}^2 + \delta_b^2$, 故由 $H_{0_1}, H_{K_1}, \cdots, H_{s_{sa}}, \delta_b$ 可查附表 1 得出各项的数值, 相加即得 δ^2 , 最后开平方得 δ 。

k 的计算也很简单。表中用 Δ 记 $H_{0_1}^4 + H_{K_1}^4 + \cdots + H_{s_{sa}}^4$, 由各分潮 H 值查四次方表得各项的值, 求和即得 Δ 。若用 k' 记 $\Delta \times 0.375 \times \delta^{-4}$, 则由式 (36) 知 $k = 0.75 - k'$ 。为了避免用乘法, 先将 k' 求对数, 得 $\lg k' = \lg \Delta + \lg 0.375\delta^{-4}$, 由 Δ, δ 分别查表得 $\lg \Delta$ 和 $\lg 0.375\delta^{-4}$ 后相加即得 $\lg k'$, 再反查对数表即得 k' 。

比较麻烦的是 s 的计算, 式 (35) 的右边可以分为三部分, 可分别记为 s', s'' 和 s''' 。每

一项也比较简单,但是每一项都包含着好几个因子,在没有计算机的情况下,还是先化为对数计算较为方便。故表 3 中关于 s 的计算过程显得有些繁杂,计算时须要注意。

在计算比较熟练时,有些数据可以查一次表同时得出几个栏内的结果。例如由 $H_{M_2} = 0.67$ 查附表 1 可一下子得出 0.521 $H_{M_2}^2 = 0.234$ (表 3 第 3 栏), $H_{M_2}^4 = 0.2015$ (表 3 第 12 栏), $\lg H_{M_2} = -0.174$ (表 3 第 24, 30, 31, 39 栏)。

(3) 如果仅需要知道少数几个频率所对应的水位高度,则可由表 2 查出这些频率相应的 A, B, C 值,然后按式 (37) 就很容易得到所需要的结果。如果需要详细知道整个累积频率曲线,那么就利用表 4 的格式。

在表 4 中 z 是相对于长期平均海面的高度。有时我们需要换算为从某一高程起算点(如海图基准面,验潮水尺零点,黄海平均海水面等等)起算的高度,这时可将所有 z 值上加上一个数值 d , d 代表从这个起算点到平均海面的距离(向上为正,向下为负)。实例中 d 值是广州航道局原定的 A 站的海图基准面深度。

参 考 文 献

- [1] 中国人民解放军海军司令部, 1959. 实用潮汐学, 第 118—142 页。
- [2] Cordon, C. L., 1968. Rationalisation of chart datum in the British Isles. *Intern. Hydrogr. Rev.* **45**(1) 55—65.
- [3] Doodson, A. T., 1921. The harmonic development of the tide-generating potential. *Proc. Roy. Soc. A100*. (*Intern. Hydrogr. Rev.* **31**(1): 37—61.)

STANDARD DEVIATION-SKEWNESS-KURTOSIS METHOD (BPF METHOD) FOR CALCULATING SEA LEVEL DISTRIBUTION*

Fang Guohong, Wang Ji, Zhang Jinwen, Cao Deming,

Ding Wenlan, Yu Kejun and Zhu Yunan

(Institute of Oceanology, Academia Sinica, Institute of Marine Scientific and Technological Information, SOA)

ABSTRACT

Close relationship between probability distribution of sea level and major moments is confirmed and the dependence of the moments on tidal harmonic constants and standard deviation of non-astronomical sea level variation is given. A method is proposed for calculating probability distribution of sea level from standard deviation and coefficients of skewness and kurtosis. The method is named BPF method according to the Chinese phonetic words of these moments. The results obtained from BPF method are consistent quite well with the observed values.

* Contribution No. 1271 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.